FISICA
AL ALCANCE DE TODOS

EL MUNDO RELATIVISTA

V. Dubrovski,
Ya. Smorodinski, E. Surkov

EDITORIAL MIR MOSCU



FISICA
AL ALCANCE DE TODOS

FISICA AL ALCANCE DE TODOS

FÍSICA AL ALCANCE DE TODOS

EL MUNDO RELATIVISTA

V. Dubrovski,
Ya. Smorodinski, E. Surkov

Traducido del ruso por los licenciados en Física Salvador Colunga Sánchez y Edgar Enrique Camps C.

EDITORIAL MIR MOSCU



Impreso en la URSS

На испанском языке

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Sobre la teoría especial de la relatividad se han escrito cientos de libros, desde libros rigurosamente científicos hasta libros de divulgación. Los han escrito físicos, matemáticos y filósofos. No son pocos los autores que no han estado de acuerdo con las conclusiones de esta teoría, tan extraña para una persona acostumbrada a la imagen del mundo físico creada con los trabajos de los físicos del siglo XIX. Los acontecimientos se dieron de tal manera que fue precisamente en la teoría de la relatividad donde cruzaron sus espadas los representantes de los mundos antiguo y moderno. En los años veinte en Alemania incluso se editó un libro con un título desafiante: «Cien autores en contra de la teoría de la relatividad». Los autores de estos libros intentaban encontrar errores en la teoría y reemplazarla por alguna otra no tan incomprensible según su opinión. Pero poco a poco las voces de los críticos empezaron a debilitarse, sus libros fueron olvidados y la teoría de la relatividad entró en nuestra vida.

A las ideas y las fórmulas de la teoría de la relatividad nosotros a veces les debemos cosas tan simples como, por ejemplo, el calor en nuestra casa. Las centrales eléctricas atómicas, las cuales pronto darán calor a las ciudades, generan energía como resultado de la fisión de átomos de uranio, y esto es posible gracias a la famosa fórmula $E = mc^2$. En muchos laboratorios de investigación y fabriles del mundo trabajan aceleradores, cuyos proyectos están basados en las fórmulas de la mecánica de la teoría especial de la relatividad o, como se suele decir, de la mecánica relativista. Ahora todo indica que la mecánica relativista dejó de ser una ciencia de los científicos alejados de la práctica y que ha llegado a ser una ciencia casi «doméstica».

Cuando alguna rama de la ciencia alcanza su madurez se encuentran nuevos caminos para su exposición. Al describirla no es necesario seguir el camino histórico, recordando todas las dificultades que se tuvieron que superar. Aunque también es cierta la antigua afirmación de que en la ciencia no hay un camino «real», sin embargo, existen caminos más largos o más cortos. Nosotros trataremos de abordar la solución de los problemas de la teoría de la relatividad por el camino más corto. Cuando se creó la teoría de la relatividad este camino todavía no se había descubierto. Su descubrimiento está relacionado con los trabajos de Klein y Sommerfeld en Alemania, de Varichaka en Servia y del brillante geómetra Kotélnikov, quien trabajó en Kazán.

En los trabajos de estos físicos y matemáticos fue demostrado que el mundo de la teoría especial de la relatividad, el cual fue construido basándose en el postulado físico de la invariabilidad de la velocidad de la luz para cualesquiera observadores y fuentes móviles, coincide por sus propiedades con el mundo en el cual son ciertas las leyes de la geometría descubierta por el gran Lobachevski. La geometría de Lobachevski y la mecánica (más exactamente la cinemática) de Einstein resultaron estar muy relacionadas una con la otra: la cinemática relativista resultó ser la realización exacta de la «geometría imaginaria», como llamó a su creación Lobachevski.

Nosotros acabamos de decir «mundo de la teoría especial de la relatividad», éste no es un nombre completamente exacto. Al decir «mundo» nosotros sobreentendemos espacio. Pero este no es el mundo, ni tampoco el espacio en el que vivimos y nos movemos, no es el espacio en el que determinamos la distancia «del punto A al punto B». El puente que une la teoría de la relatividad y la geometría es el llamado espacio de velocidades. Sus puntos representan todos los sistemas de referencia posibles que se mueven en línea recta y uniformemente, y en calidad de medida del alejamiento de un punto con respecto a otro sirve la velocidad relativa de los sistemas correspondientes. En este espacio se tiene una geometría propia con sus rectas, ángulos, triángulos, con sus teoremas de senos y cosenos, etc. El carácter de esta geometría es determinado por la física, y concretamente, por la ley de la suma de las velocidades. Mientras las velocidades son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, los vectores de las velocidades se suman de la misma

manera que los vectores de los desplazamientos, y la geometría del espacio de velocidades será la misma que la geometría del espacio en el que nosotros vivimos, es decir, euclidiana. Pero en el campo de las velocidades grandes empieza una aritmética extraña: «cualquier velocidad + la velocidad de la luz = la velocidad de la luz», ¿acaso no es esto un absurdo? Y este «absurdo» postulado de la aritmética de las velocidades —el postulado de Einstein— nos lleva al igualmente «absurdo» postulado de la geometría del espacio de velocidades de Lobachevski: «por un punto dado fuera de una recta se pueden trazar no menos de dos rectas que no intersecan a la recta dada». ¡El espacio relativista de velocidades posee la geometría de Lobachevski!

Esta admirable conclusión es el resultado de un camino bastante largo y no fácil, el cual tenemos que recorrer. La dificultad consiste en que el espacio de velocidades existe solamente en nuestra imaginación, no se le puede ver ni tocar con las manos. Por eso, antes de empezar a estudiar de lleno su geometría, vamos a hablar de algunas cosas que parecen estar alejadas de ésta (como en el capítulo 3, dedicado a los diferentes espacios y a sus proyecciones planas, los mapas) o demasiado simples y triviales (como en el capítulo 1, donde se analiza el caso no relativista). Pero nosotros esperamos que cada ejemplo y cada analogía van a jugar su papel en su momento adecuado y facilitarán al lector el acceso al mundo de las velocidades relativistas oculto a la vista.

Estudiaremos este mundo armados de un léxico peculiar. Este nos va a permitir transformar los problemas de la cinemática en problemas puramente geométricos y resolverlos utilizando todo el arsenal de los teoremas geométricos. Paralelamente obtendremos la mayoría de los resultados básicos de la teoría especial de la relatividad. Sin embargo, hasta el último apartado, que es una especie de tributo a la tradición, el lector no encontrará razonamientos sobre el espacio-tiempo, las dimensiones, las longitudes y los relojes, por los cuales generalmente empieza cualquier libro sobre la teoría de la relatividad. Hemos decidido no escribir sobre la reducción de las longitudes, ni sobre la paradoja de los gemelos, ni sobre muchos otros sorprendentes efectos relativistas. Sobre todo esto se ha escrito muchas veces. Pero la teoría no es solamente una colección de hechos, sino que en grado no menor, o quizá mayor, un conjunto de métodos para su obtención. Por eso, nosotros no hemos intentado

analizar la mayor cantidad posible de problemas, sino que hemos tratado de no dejar pasar la posibilidad de resolverlos por diferentes caminos.

El espacio de velocidades funciona bien sobre todo en los problemas de colisiones, y es ésta una de las causas que nos motivó a hablar sobre él. Sin exageración se puede decir que estos son los problemas físicos que se resuelven con mayor frecuencia. Diariamente en decenas de laboratorios del mundo, en Sérpujov y Ginebra, en Dubná y Brookhaven, se procesan cientos de miles de experimentos de dispersión de partículas elementales de altas energías. Este es el único método para poder entender las leyes más profundas de la composición de la materia. Las energías se hacen cada vez más grandes y los físicos intentan registrar sucesos cada vez más raros e interesantes de «la vida y la muerte» de las partículas elementales. Para elegir estos sucesos se hace necesario analizar una cantidad enorme de datos experimentales, de fotografías y de lecturas de los contadores, y cada vez se tiene que resolver uno u otro problema de la cinemática de colisiones (ahora esto se hace, principalmente, con sistemas automáticos y ordenadores).

Si la geometría no euclidiana no hubiera sido creada en el siglo XIX, entonces probablemente habría sido descubierta al estudiar la cinemática de las partículas relativistas. La inteligencia del hombre es tan poderosa que las ideas abstractas y los descubrimientos aparecen mucho antes de encontrar aplicación. En esto radica la fuerza de la ciencia y en esto se basa la seguridad en la importancia primordial de las investigaciones fundamentales.

Nuestro libro está dirigido a todos aquellos que quieran saber con todo detalle cómo de los postulados generales de la teoría de la relatividad se deducen las fórmulas concretas de la cinemática relativista, y de paso conocer los fundamentos de la geometría de Lobachevski. El lector puede elegir la secuencia de la lectura en dependencia de su preparación y su gusto. Para los lectores suficientemente preparados tenemos reservada una ruta completamente corta: empieza en la sección 3.5 y se sigue inmediatamente en el cap. 8, donde al mismo tiempo se deducen las fórmulas básicas de la teoría de la relatividad y de la geometría de Lobachevski. Es posible que este camino le guste al lector y que así le surja el deseo de leer todo lo demás. También hay otros dos caminos cortos: el lector que se interesa más por la parte

matemática del asunto puede omitir los caps. 5 y 7, y aquel para quien es más cercana la física y quien está listo para creer de buena fe las fórmulas básicas de la geometría de Lobachevski, el cap. 4 (el más difícil en el sentido matemático).

Este libro surgió de las conferencias dadas a los escolares de los grados 9º y 10º de la escuela-internado de física y matemáticas No. 18 de la Universidad Estatal de Moscú en los años 1969—1970 y 1979—1980, y puede ser útil para el trabajo de las materias facultativas escolares de física y matemáticas. Con este fin al final de casi cada capítulo se han agregado algunos problemas para que el lector los resuelva por su cuenta, los cuales amplían y profundizan el contenido del libro. Para su lectura no son necesarios conocimientos que salen fuera de los límites de los programas escolares, estamos seguros de que lo podrá entender cualquier persona que se interese por la física y las matemáticas y, lo que es más importante, que se sienta capaz para trabajar en serio con el fin de conocer algo nuevo y completamente singular. (Vale la pena remarcar por separado que en este libro juega un papel muy importante la función exponencial $y = e^x$. En los libros escolares ésta se define como la función exponencial, cuya derivada para $x = 0$ es igual a 1. En la teoría de la relatividad a esta condición de una manera excepcional le corresponde la condición de que para velocidades pequeñas las fórmulas relativistas deben convertirse en las fórmulas de la mecánica común, la mecánica de Newton. Sobre esto se habla en el cap. 8.)

Este libro no es para una lectura fácil, en ninguna de sus partes se ha sacrificado la exactitud y la demostrabilidad en aras de la «divulgación». Sin embargo, el lector podrá aprender a resolver problemas difíciles e interesantes de la teoría de la relatividad. Esto lo podrá hacer si, por supuesto, al confiar en sus fuerzas supera todas las dificultades, las cuales no hace mucho asustaban a personas con más experiencia, pero probablemente no tan ávidos de saber como nuestro lector.

Los autores

Capítulo 1
EL ESPACIO DE VELOCIDADES NO RELATIVISTA

Antes de iniciar un viaje largo y difícil al espacio de velocidades relativista, queremos recorrer con el lector una ruta más ligera, estudiar el espacio de velocidades en la mecánica clásica. Aquí todo nos será habitual, tanto las leyes de la física como las leyes de la geometría, y estará relacionado con la geometría más usual del plano que todos estudiamos en la escuela. Gracias a esto podremos concentrar la atención en cómo en los problemas físicos de una manera natural surge el objeto geométrico, el espacio de velocidades, de la misma manera que las leyes físicas bien conocidas se convierten en teoremas geométricos (por ejemplo, la ley de la conservación de la energía —¡en el teorema de Pitágoras!) y viceversa. La experiencia adquirida aquí nos prestará un gran servicio más adelante cuando lleguemos al mundo relativista, cuya física y geometría es probablemente desconocida a la mayoría de nuestros lectores.

1.1. LAS COLISIONES ELÁSTICAS DE PARTÍCULAS NO RELATIVISTAS

Iniciaremos el cumplimiento de nuestro programa con el análisis de un problema sencillo pero muy necesario, el problema de la colisión elástica de dos cuerpos, cuyas velocidades son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. El problema consiste en lo siguiente. Supongamos que una partícula pasa volando cerca de otra. Estas pueden ser dos protones, uno de un acelerador y el otro de un blanco en reposo, o dos electrones en dos haces que se mueven en sentidos contrarios en un acumulador, que es un anillo toroide hueco colocado en un campo magnético. Estas pueden ser un

cometa o una nave espacial con sus motores funcionando, los cuales pasan volando cerca del Sol. Estas pueden ser también unas bolas de billar que chocan sobre una mesa lisa.

Todos estos eventos tienen un rasgo general. Cuando las partículas colisionantes se encuentran lejos una de otra se desplazan libremente, por inercia, con velocidades constantes. Al disminuir la distancia entre ellas empieza a afectar la interacción, la atracción o la repulsión, sus trayectorias se encorvan y sus velocidades cambian de magnitud y de dirección. Al haber pasado cerca una de otra, a una distancia grande de nuevo las partículas se mueven uniformemente y en línea recta, pero ahora con nuevas velocidades. La magnitud y la dirección de estas velocidades dependen de la ley de interacción, de qué fuerzas actúan entre las partículas y de lo lejos que pasaron éstas una de la otra. En cualquier caso, estas velocidades no pueden ser arbitrarias, es decir, si se puede despreciar la interacción con terceros cuerpos, y si el estado interno de las partículas no cambia (colisiones elásticas), entonces para cualquier ley de interacción y para cualquier proceso de choque se deben cumplir dos leyes de conservación: la suma de los impulsos de ambas partículas y la suma de las energías cinéticas antes y después de la colisión deben ser iguales. ¿A qué consecuencias conduce esto?

Denotemos los impulsos y las energías de las partículas A y B con las masas m_A y m_B antes del choque, cuando las partículas estaban tan alejadas una de la otra que se les podía considerar libres, o sea, no sujetas a una interacción, con

$$p_A,\ E_A;\ p_B,\ E_B.$$

Los impulsos y las energías de las partículas después del choque, cuando las partículas ya están tan alejadas una de la otra que de nuevo se les puede considerar libres, serán designadas por

$$p'_A,\ E'_A;\ p'_B,\ E'_B.$$

La ley de la conservación del impulso establece que durante la colisión el impulso total del sistema p, que es igual a la suma de los impulsos de ambas partículas, $p = p_A + p_B$, se conserva constante. En particular, el impulso total no cambia durante todo el tiempo del choque:

$$p = p' \quad \text{ó} \quad p_A + p_B = p'_A + p'_B. \tag{1.1}$$

En una colisión elástica no cambia tampoco la energía cinética total del sistema:

$$E = E' \text{ ó } E_A + E_B = E'_A + E'_B. \qquad (1.2)$$

Estas leyes de conservación se deben cumplir en cualquier sistema inercial de referencia, o sea, en un sistema de referencia que se mueve por inercia uniformemente y en línea recta.

Escribamos la ley de la conservación del impulso en el sistema de referencia, en el cual antes de la colisión una de las partículas estaba en reposo, la partícula del blanco A, $v_A = 0$:

$$m_B \mathbf{v}_B = m_A \mathbf{v}'_A + m_B \mathbf{v}'_B.$$

De esta relación se deriva que los vectores de las velocidades de las partículas antes y después de la dispersión se encuentran en un plano, en el plano de los vectores $\mathbf{v}'_A$ y $\mathbf{v}'_B$. Por eso, a lo largo de todo el libro vamos a analizar solamente movimientos en un plano, cuando todas las partículas, los observadores y los sistemas de referencia se mueven en un mismo plano o, puede ser, en planos paralelos. Esto de ninguna manera limita la generalidad de los problemas que resolvemos y permite una fuerte ganancia en la ilustratividad y sencillez de la exposición. La adición de una tercera dimensión es elemental y de ninguna manera cambia la esencia de nuestros razonamientos ni las conclusiones que siguen de ellos. Además, nos pondremos de acuerdo sobre la notación que vamos a utilizar después. Diferentes partículas, observadores y sistemas de referencia van a ser denotados con letras mayúsculas A, B, C, . . ., X; sus velocidades (vectores) se designarán por $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$, . . ., $\mathbf{v}_X$, y los valores absolutos de las velocidades, por v_A, v_B, . . ., v_X; si necesitamos señalar un sistema de referencia concreto, con respecto al cual se miden estas velocidades, vamos a utilizar el símbolo $\mathbf{v}_{A|C}$, que es *la velocidad de la partícula (del observador) A con respecto al sistema de referencia C.*

Y así, ¿qué limitaciones imponen las leyes de la conservación de la energía y del impulso sobre las velocidades de las partículas después de la dispersión?

Pasemos al sistema de referencia O, en el cual el impulso total $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = m_A \mathbf{v}_{A|O} + m_B \mathbf{v}_{B|O}$ es igual a cero. Se le llama *sistema del centro de masa.* En él las partículas se mueven una al encuentro de la otra, los vectores de sus

velocidades tienen direcciones opuestas y las magnitudes de las velocidades de las partículas son inversamente proporcionales a sus masas: en efecto, si $m_A v_A + m_B v_B = 0$, entonces $m_A v_A = -m_B v_B$ y

$$v_A/v_B = m_B/m_A. \qquad (1.3)$$

Esta relación es parecida a la «regla de la palanca de primer género». En el proceso de la interacción de las partículas una con otra sus velocidades cambian en magnitud y dirección, pero en vigor de la ley do la conservación del impulso, el impulso total todo el tiempo se conserva igual a cero. Esto significa que en todo momento los vectores de sus velocidades son opuestos en dirección y los módulos de las velocidades satisfacen la «regla de la palanca» (1.3). Después de que las partículas pasan una junto a la otra y la interacción entre ellas cesa, los nuevos valores de las velocidades resultan ser iguales en magnitud a los valores iniciales. Esto se deduce de la ley de la conservación de la energía para una colisión elástica $E_A + E_B = E'_A + E'_B$. En efecto, la suma de sus energías cinéticas antes de la colisión es igual, en concordancia con la regla de la palanca,

$$E_A + E_B = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{m_B v_B^2}{2} = \frac{m_A}{2} v_A^2 + $$
$$+ \frac{m_B}{2} \left(\frac{m_A v_A}{m_B}\right)^2 = \frac{m_A}{2} \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v_A^2.$$

De una manera análoga, para las energías después de la colisión podemos escribir que

$$E'_A + E'_B = \frac{m_A}{2} \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) v'^2_A.$$

Igualando las energías totales antes y después de la colisión obtenemos que $v_A = v'_A$, por lo tanto, en base a la regla de la palanca también $v_B = v'_B$. De esta manera, en el sistema del centro de masa O los vectores de las velocidades de las partículas colisionantes como resultado de la interacción pueden girar sólo en cierto ángulo sin cambiar su magnitud o invierten su dirección. El ángulo entre las direcciones de la velocidad de la partícula X en el sistema de referencia O antes y después de la colisión se llama ángulo de dispersión $\varphi_{X|O}$ de la partícula X en el sistema O. Representemos el resultado de la colisión de dos partículas en

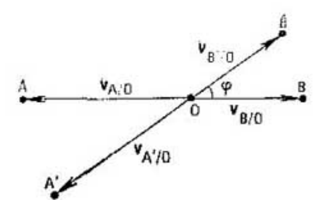


FIG. 1.1

una gráfica. Tomemos una hoja de papel, fijemos en ella el punto O, y a partir de éste tracemos en una dimensión determinada los vectores de las velocidades de las partículas $v_{A|O}$, $v_{A'|O}$, $v_{B|O}$, $v_{B'|O}$ antes y después de la dispersión (fig. 1.1). Denotemos los puntos de los extremos de los vectores de las velocidades como A, A', B, B'. Obtendremos una figura que de aquí en adelante vamos a llamar *grafo cinemático de la dispersión elástica.* Examinémosla atentamente. En nuestro grafo los puntos A, B, O se encuentran en una sola línea y el punto O divide el segmento AB de acuerdo a una relación inversamente proporcional a las masas de las partículas (regla de la palanca):

$$\frac{|OA|}{|OB|}=\frac{m_B}{m_A}.$$

A las velocidades de las partículas después de la dispersión les corresponden los puntos A', B' que se encuentran en la recta $A'B'$ que pasa por el punto O, además, las longitudes de los segmentos $A'O$ y AO son iguales, $|A'O|=|AO|$, de la misma manera que $|B'O|=|BO|$. Esto es consecuencia de las leyes de la conservación de la energía y del impulso para una colisión elástica. Pero las leyes de conservación no determinan la magnitud del ángulo de dispersión $\varphi_{A|O}=\varphi_{B|O}$, el cual nosotros denotamos como φ en el grafo cinemático (fig. 1.1). Este ángulo puede ser diferente en dependencia de las condiciones concretas de dispersión y puede tomar los valores desde cero hasta π. Si las partículas pasan lejos una de la otra y la interacción entre ellas es muy pequeña, la variación de la velocidad de las partículas también será no muy grande y el ángulo de dispersión φ será pequeño. Cuanto menor es la distancia de acercamiento entre las partículas, tanto más fuerte se manifiesta la interacción y tanto mayor llega a ser el ángulo de

dispersión. A una colisión «de frente» le corresponde el valor $\varphi = \pi$. Las colisiones reales casi siempre ocurren no en un plano, sino en el espacio, por eso, para los vectores de las velocidades de las partículas después de la dispersión siempre hay un grado de libertad más: se puede girar la hoja de papel con el grafo cinemático en un ángulo arbitrario alrededor de la dirección del movimiento relativo de las partículas colisionantes, las leyes de la conservación de la energía y el impulso se cumplirán como antes. Tendremos en cuenta esta posibilidad, pero no vamos a detenernos con amplitud en ella, limitándonos solamente a los movimientos en un plano.

1.2. CÓMO SE VE LA DISPERSIÓN ELÁSTICA EN EL SISTEMA DE REFERENCIA DE LABORATORIO

Ya nos hemos convencido de que las leyes de la conservación de la energía y el impulso en el sistema del centro de masa llevan a consecuencias muy simples: los vectores de las velocidades de las dos partículas colisionantes pueden variar sólo su dirección, pero no su magnitud, conservando todo el tiempo direcciones contrarias. Pero, generalmente, se tienen que examinar las colisiones de las partículas en el sistema de referencia de laboratorio, en el cual una de las partículas es la del blanco A. La otra partícula B sale de un acelerador con una velocidad $v_{B|A}$, interacciona con el blanco y se dispersa en un ángulo $\varphi_{B|A}$, el cual para abreviar lo denotamos por $\vartheta = \varphi_{B|A}$. Como resultado de la colisión la partícula del blanco adquiere una cierta velocidad $v_{A'|A}$ y sale volando con un ángulo α con respecto a la dirección del movimiento del haz de partículas. Este ángulo es llamado *ángulo de respuesta*.

Un observador en el sistema de referencia de laboratorio A puede tomar su hoja de papel, fijar en ella el punto A y trazar con respecto a este punto los vectores de las velocidades de las partículas antes y después de la dispersión. Como resultado de esto el observador obtendrá su *diagrama de velocidades* medidas en el sistema de referencia A, *el diagrama* K_A. Denotará como antes los extremos de los vectores de las velocidades con los puntos A, B, A', B'. La velocidad de la partícula A antes de la dispersión era igual

a cero, por eso, el extremo de este vector de magnitud cero simplemente coincide con el punto A, elegido en calidad de punto inicial para la construcción del diagrama K_A. Veamos qué limitaciones imponen las leyes de la conservación de la energía y el impulso sobre las posibles velocidades después de la colisión $v_{B'|A}$ y $v_{A'|A}$.

En principio se podrían resolver de nuevo las ecuaciones (1.1) y (1.2), que describen también en este nuevo sistema de referencia las leyes de la conservación de la energía y el impulso, pero esto sería un esfuerzo poco razonable. Se puede proceder de una manera más sencilla. Para esto es necesario recordar cómo es que en la mecánica no relativista se transforman las velocidades al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Esta regla es conocida como *la ley de la suma de las velocidades*, la cual puede ser formulada ilustrativamente como la «regla del perro»: «si un perro corre sobre una balsa que se mueve en un río, entonces su velocidad con respecto a la orilla es igual a la suma vectorial de la velocidad del perro con respecto a la balsa y la velocidad de la balsa con respecto a la orilla»:

$$v_{X|A} = v_{X|O} + v_{O|A} \qquad (1.4)$$

(X es el perro, O es la balsa, A es la orilla).

Ahora se puede pasar del sistema del centro de masa O al sistema de referencia de laboratorio A. Para esto es necesario agregar a cada vector de velocidad en el diagrama K_O un mismo vector de velocidad $v_{O|A} = -v_{A|O}$, con la cual el sistema O se mueve con respecto a A. El resultado de esta suma es el diagrama de velocidades K_A mostrado en la fig. 1.2. Con líneas delgadas están indicadas las velocidades en el sistema O, con líneas gruesas, los vectores de las velocidades de las partículas obtenidos en el sistema de laboratorio. Es evidente que en el diagrama K_A la distribución de los puntos A, B, A', B', O se conserva igual que en K_O, ya que la estructura del grafo cinemático no cambia al pasar a otro sistema inercial de referencia. Como antes los puntos A', O, B' se encuentran en una recta, como antes se cumple la regla de la palanca $|AO| : |BO| = |A'O| : |B'O| = m_B : m_A$, y al igual que antes sus «brazos» no cambian como resultado de la dispersión: $|A'O| = |AO|$, $|B'O| = |BO|$. Además, los puntos A, B, O, A', B' del grafo cinemático en los diagramas K_A y K_O simplemente coinciden, solamente cambia el origen: en el dia-

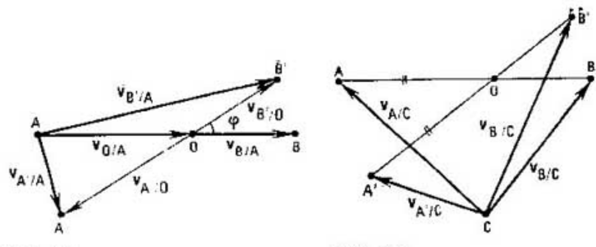


Fig. 1.2 FIG. 1.3

grama K_O los vectores de las velocidades están trazados desde el punto O, pero en el diagrama K_A los vectores de las velocidades están trazados desde el punto A a los mismos puntos A', B', B, O. Toda la información sobre el resultado de la dispersión elástica ya está fijada por cinco puntos A, B, O, A', B' distribuidos sobre la hoja de papel en concordancia con la regla de la palanca formulada más arriba. Este grafo cinemático puede ser estudiado en cualquier otro sistema inercial de referencia C, que se mueve con respecto a A con velocidad $v_{C|A}$ (fig. 1.3). Para esto es suficiente trazar del punto C, el extremo del vector $v_{C|A}$, vectores a todos los demás puntos del grafo cinemático, como resultado obtendremos las velocidades de las partículas antes y después de la dispersión ya en el nuevo sistema de referencia C. Con esto nosotros no debemos preocuparnos más por las leyes de la conservación de la energía y el impulso, éstas, como ya se dijo más arriba, ¡se cumplirán automáticamente también en el sistema C! En esto precisamente consiste la ventaja principal del método geométrico para la dispersión elástica de las partículas no relativistas. Para conocer mejor este nuevo método de razonamiento veremos algunos problemas de la teoría de colisiones que son algo sencillos, pero muy instructivos.

Supongamos que en el sistema de laboratorio la partícula más pesada B se mueve de izquierda a derecha, colisiona con una partícula más ligera del blanco A y como resultado de la interacción elástica cambia la dirección de su movimiento, se dispersa en un ángulo ϑ. Nosotros demostraremos que este ángulo no puede ser demasiado grande y encontraremos su magnitud límite. Para esto es suficiente dibujar el grafo

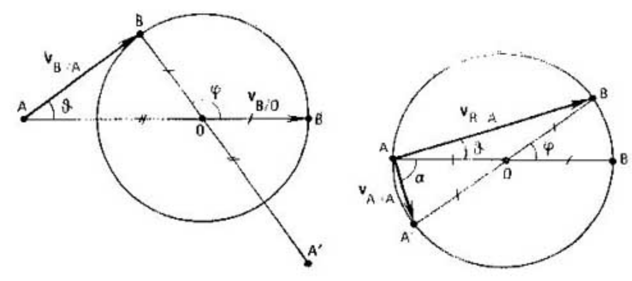


FIG. 1.4 FIG. 1.5

cinemático de este proceso, que en realidad ya lo tenemos y está representado en la fig. 1.2. Ya hemos dicho que el ángulo φ en el grafo cinemático puede variar de cero hasta π. Con ello el punto B' que corresponde al extremo del vector de la velocidad de la partícula B después de la dispersión va a recorrer la circunferencia con centro en el punto O y con radio $v_{B|O}$. El punto A, que representa la velocidad del sistema de referencia de laboratorio, en el cual la partícula ligera del blanco estaba en reposo, va a encontrarse fuera de esta circunferencia: esto se deduce de que $m_A < m_B$ y de la regla de la palanca $v_{A|O} : v_{B|O} = m_B : m_A$. En el diagrama K_A (fig. 1.4) el vector de la velocidad de la partícula B después de la dispersión $v_{B'|A}$ con el cambio del ángulo φ variará su magnitud y dirección, desviándose en un ángulo ϑ con respecto a la dirección inicial del movimiento de la partícula colisionante, la dirección del vector $v_{B|A}$. Es evidente que la magnitud de este ángulo tiene un límite superior y que su valor máximo se alcanza cuando el vector $v_{B'|A}$ es tangente a la circunferencia con centro en O. El ángulo $\widehat{AB'O}$ en este caso va a ser recto, y del triángulo rectángulo $AB'O$ se puede encontrar su seno:

$$\operatorname{sen} \vartheta_{\text{máx}} = \frac{|OB'|}{|AO|}.$$

Pero en el grafo cinemático $|OB'| = |OB|$, y en concordancia con la regla de la palanca $|OB| : |OA| = m_A : m_B$, por eso,

$$\operatorname{sen} \vartheta_{\text{máx}} = \frac{|OB|}{|OA|} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Vemos que el ángulo máximo de dispersión de una partícula pesada sobre una partícula ligera en reposo no depende de su velocidad y se determina solamente por la relación entre las masas de las partículas.

En el lenguaje de los grafos cinemáticos este resultado se obtiene fácilmente, pero para comparar, nosotros les aconsejamos intentar obtenerlo en forma analítica escribiendo las leyes de la conservación de la energía y el impulso en el sistema de referencia de laboratorio. Ustedes se convencerán de que se tiene que invertir mucho más esfuerzo.

Como una ilustración más nos servirá el estudio de las colisiones de partículas con igual masa. El grafo cinemático de este proceso está representado en la fig. 1.5. Las masas de las partículas son iguales, por eso, el punto O se encuentra en la mitad del segmento AB. Los puntos A' y B' que corresponden a las velocidades de las partículas después de la dispersión serán los extremos del diámetro de la circunferencia de radio $|AO|$ con centro en el punto O. Las velocidades $v_{A'|A}$ y $v_{B'|A}$ de las partículas después de la dispersión en el sistema de laboratorio se representarán con vectores trazados del punto A a los puntos A' y B'. Y ya a la primera vista de esta figura se pueden hacer algunas afirmaciones geométricas simples, las cuales se traducen fácilmente al lenguaje de la física. Veremos tres ejemplos.

1. Si el golpe no es central, entonces el ángulo $A'AB'$ es recto (el ángulo inscrito en la circunferencia y que se apoya en el diámetro). Pero este ángulo es igual al ángulo entre las direcciones de las velocidades de las partículas después de la dispersión en el sistema de laboratorio. Por lo tanto, *en el sistema de laboratorio las partículas no relativistas de igual masa siempre se separan formando un ángulo recto* [1]). Más tarde veremos que para las partículas relativistas rápidas esta afirmación ya no tiene lugar.

2. Ahora escribamos el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo $A'AB'$: $|A'B'|^2 = |AA'|^2 + |AB'|^2$. Substituyamos en él las longitudes de los lados del triángulo por sus expresiones a través de las velocidades de las partículas en el sistema de laboratorio: $|AA'| = v_{A'|A}$, $|AB'| = v_{B'|A}$, $|A'B'| = |AB| = v_{B|A}$ y multipliquemos la igualdad obtenida por $m/2$, que es la

[1]) En el caso de un choque central la partícula B se queda en su lugar; puede considerarse que aquí tenemos un ángulo recto degenerado.

mitad de la masa de cada una de las partículas colisionantes. Obtendremos la igualdad

$$\frac{mv^2_{B|A}}{2} = \frac{mv^2_{B'|A}}{2} + \frac{mv^2_{A'|A}}{2},$$

¡que es la ley de la conservación de la energía en el sistema de laboratorio!

3. Encontremos la relación entre el ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa φ y los ángulos de dispersión ϑ y de respuesta α en el sistema de laboratorio. El triángulo AOA' es equilátero, por eso, $\varphi + 2\alpha = \pi$ ó $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$. El ángulo exterior $\widehat{BOB'} = \varphi$ del triángulo equilátero AOB' es igual a la suma de dos de sus ángulos internos $\widehat{OAB'} = \widehat{OB'A} = \vartheta$. Por eso, $\vartheta = \varphi/2$, o sea, *para una colisión elástica de partículas de igual masa, el ángulo de dispersión en el sistema de laboratorio es igual a la mitad del ángulo de dispersión en el sistema del centro de masa.*

Estos ejemplos muestran que la cinemática de las colisiones no relativistas y las leyes de la conservación de la energía y el impulso están íntimamente ligadas con la geometría de Euclides. Y la causa de esto es la ley de la suma de las velocidades formulada más arriba (la regla del paralelogramo) al pasar de un sistema inercial de referencia a otro.

1.3. EL ESPACIO DE VELOCIDADES

Regresemos de nuevo a nuestros ejemplos. Hemos iniciado la construcción del «modelo geométrico» de una colisión elástica de dos partículas, de su grafo cinemático, partiendo de la elección de un sistema de referencia, por ejemplo, del sistema del centro de masa O. Después en el diagrama de velocidades K_O dibujamos el «erizo de velocidades» de las partículas colisionantes, o sea, trazamos desde el punto O los vectores de las velocidades de las partículas A y B antes y después de la dispersión. Podemos hacer lo mismo en cualquier otro diagrama de velocidades, por ejemplo, en K_A, el diagrama de velocidades con respecto al sistema de laboratorio. El «erizo de velocidades» en el diagrama K_A

se va a ver de otra manera que en K_O. Pero los puntos A, B, A', B' y O (los extremos de sus «púas» son los de los vectores de las velocidades) en ambos diagramas están distribuidos de una manera completamente idéntica, funciona la regla de la suma de las velocidades (1.4). En este sentido *el grafo cinemático no depende del diagrama en el que lo dibujamos.* Por eso, sería deseable que desde el principio todas nuestras construcciones no dependieran de la elección del sistema de referencia.

Es fácil comprender como se puede lograr esto. Supongamos que todos los diagramas de velocidades están dibujados en una película transparente. Ahora borremos en cada diagrama todos los vectores dejando solamente los puntos: sus orígenes y sus extremos. Entonces se pueden sobreponer los diagramas de tal manera que sus puntos homónimos (o sea, los extremos de los vectores de las velocidades de las mismas partículas) coincidan. Como resultado, en lugar de algunos diagramas diferentes para distintos observadores obtendremos un diagrama universal. A cualquier sistema inercial de referencia le corresponderá un punto en el diagrama universal. Digamos, en nuestros ejemplos al sistema de laboratorio le corresponde el punto A, al sistema del centro de masa, el punto O, al sistema en el que la partícula B se encontraba en reposo antes de la colisión, el punto B, etc. Con este diagrama o carta universal se puede conocer fácilmente qué resultados obtendrá cualquier observador inercial C midiendo las velocidades de las mismas partículas colisionantes A y B. Es suficiente trazar los vectores del punto C a los puntos A, B, A' y B' y medir sus longitudes con una regla y sus ángulos con un transportador. Pero no hay necesidad de hacer de nuevo todas estas mediciones para cada nuevo sistema. Las magnitudes que nos interesan se pueden calcular con ayuda de los bien conocidos teoremas de los cosenos y los senos de la geometría euclidiana.

Resumamos. Nos hemos convencido de que

> *a cada sistema inercial de referencia se le puede adjudicar un punto de un plano de tal manera que el vector de la velocidad del sistema Y con respecto al sistema X será igual al vector $\overrightarrow{XY}$, que une los puntos correspondientes del plano.*

Este plano se denomina *espacio de velocidades no relativista.*

Ahora se puede dar un sentido cinemático a diferentes conceptos de la geometría. Por ejemplo, la distancia entre dos puntos del espacio de velocidades es la magnitud de la velocidad relativa de los sistemas de referencia correspondientes; a los puntos que se encuentran en la recta AB les corresponden los sistemas de referencia que se mueven a lo largo de la misma recta con respecto al sistema A (ó B), etc. Haciendo uso de esto se pueden resolver muchos problemas geométricos con ayuda de la física. Sin embargo, en nuestro libro la secuencia de las acciones será al contrario: vamos a resolver los problemas de la cinemátia con ayuda de la geometría. Solamente que los movimientos que vamos a estudiar ocurren con velocidades muy grandes, cercanas a la velocidad de la luz y se sujetan a las leyes de la teoría de la relatividad. Y en el espacio de velocidades va a actuar no la acostumbrada geometría euclidiana, sino la geometría de Lobachevski.

PROBLEMAS Y COMPLEMENTOS

La geometría ayuda a la física

1. Una partícula A de masa m_A choca a una velocidad v_A contra una partícula en reposo B con masa m_B. Ocurre una colisión elástica, después de la cual la partícula B se mueve con un ángulo $\alpha = \pi/4$ con respecto a la dirección de movimiento de la partícula A antes de la colisión. Hállese el ángulo de dispersión θ de la partícula A y las magnitudes de las velocidades v'_A y v'_B de las partículas A y B después de la colisión.

2. Durante el bombardeo del helio con partículas α, que tienen una energía E, la partícula incidente se dispersó en un ángulo $\theta = \pi/3$. Determínese el ángulo de respuesta y las energías de la partícula α y del núcleo del helio después de la colisión.

3. Un neutrón con una energía E sufrió una colisión elástica con un núcleo de ^4He. En el sistema del centro de masa el ángulo de dispersión φ resultó ser igual a $\pi/2$. Hállese el ángulo de dispersión y las energías de las partículas después de la colisión en el sistema de laboratorio.

4. Una partícula α que vuela con una velocidad v_α sufre una colisión elástica con un núcleo en reposo y se dispersa en un ángulo $\theta = \pi/2$. ¿Para qué relación entre las masas de la partícula α m_α y del núcleo M_N es esto posible? Determínese las velocidades de la partícula α y del núcleo después de la colisión y la magnitud del ángulo de respuesta.

5. Una partícula de masa m choca en forma elástica con una partícula en reposo, cuya masa $M > m$, y se desvía en un ángulo $\theta = \pi/2$ con respecto a la dirección inicial del movimiento. Encuéntrese el ángulo de respuesta α.

6. Un neutrón (con número de masa 1) sufrió una colisión elástica con un deuterón inicialmente en reposo (con número de masa 2). ¿Cuál es la parte de la energía cinética que pierde el neutrón al dispersarse en un ángulo $\theta = \pi/4$?

7. Una partícula de masa m colisiona con una partícula en reposo más pesada de masa M y en la colisión se pierde la $(1 - k^2)$-ésima parte de la energía mecánica en el sistema del centro de masa (una colisión no elástica). ¿Bajo qué ángulo se separarán las partículas en el sistema de laboratorio, si la partícula pesada salió volando con un ángulo de respuesta máximo α?

La física ayuda a la geometría

8. Demuéstrese que si en algún sistema de referencia S los vectores de las velocidades de dos partículas forman ángulos iguales con el vector de la velocidad del centro de masa de ellas, entonces los impulsos de estas partículas en el sistema S son iguales en magnitud. De aquí dedúzcase el teorema sobre la bisectriz de un triángulo: la bisectriz SO del triángulo SAB divide el dado AB en segmentos, cuya relación $|AO| : |OB|$ es igual a la relación de los lados adyacentes $|AS| = |SB|$.

9. Aplicando la ley de la conservación de la energía demuéstrese que la suma de los cuadrados de las distancias desde cualquier punto a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las distancias desde este punto a los otros dos vértices.

10. Sea O un punto en el lado AB del triángulo SAB. Demuéstrese la *fórmula de Stuart* para la longitud de segmento SO:

$$|SO|^2 \cdot |AB| = |SA|^2 \cdot |BO| + |SB|^2 \cdot |AO| -$$

$$- |AO| \cdot |BO| \cdot |AB|.$$

(*Indicación*: supongamos que los puntos A y B representan las velocidades de dos partículas que colisionan en forma elástica, que O es la velocidad de su centro de masa y S, la velocidad de cierto sistema de referencia. Escríbase la ley de la conservación de la energía para la colisión en el sistema de referencia S para el caso cuando las velocidades de las partículas A y B con respecto a S después de la colisión tienen la misma dirección que la velocidad del centro de masa.)

Capítulo 2
PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

2.1. LO QUE DECÍA GALILEO SOBRE ESTO

Nosotros ya nos hemos convencido de que las propiedades del grafo cinemático no dependen de la velocidad de un observador que se mueve uniformemente. Y esto no es casual. Resulta que en diferentes sistemas inerciales de referencia *todas* las leyes físicas son las mismas y no dependen del movimiento relativo de dos observadores inerciales diferentes. Por primera vez este principio fue formulado para la mecánica por Galileo Galilei en la obra titulada «Diálogo sobre dos importantísimos sistemas del mundo» (*Diá ogo sopra due massimi sistemi del mondo, tolemaico e copernicano*). Esta es la misma obra que atrajo sobre él la ira de la iglesia. Fue publicada en 1632, y en 1633 ya era objeto de juicio en el Tribunal de la Inquisición. Galileo exponía sus ideas con un lenguaje literario excepcional, considerando que había que hacerlas inteligibles para muchos. Los personajes de su libro discuten muchos planteamientos relacionados con la mecánica y el origen del mundo. Entre estos se encuentra el planteamiento de cómo ocurren los diferentes fenómenos físicos en un sistema que se mueve uniformemente y en línea recta. Galileo escribía [1]):

«Reúnase con alguno de sus amigos en una habitación amplia bajo la cubierta de algún barco y traiga consigo moscas, mariposas y otros insectos voladores semejantes; supongamos que allí usted también tendrá una pecera grande con pececillos moviéndose dentro de ella; después cuelgue del techo un balde del cual el agua va a caer gota a gota a otro recipiente con cuello angosto, colocado debajo del primero. Mientras el barco no se mueve observe con atención como los

---

[1]) *Galileo Galilei*. Obras escogidas en dos tomos, t. 1. Moscú, Edit. Nauka, 1964 (en ruso).

pequeños insectos voladores se mueven con la misma velocidad en todas las direcciones de la habitación; los peces, como usted lo podrá comprobar, van a moverse indiferentemente en todas direcciones; todas las gotas caerán en el recipiente puesto debajo y usted al lanzar algún objeto no tendrá que hacerlo con más fuerza en una dirección que en otra si las distancias son las mismas; y si usted va a saltar con las dos piernas al mismo tiempo, entonces ejecutará el mismo brinco a la misma distancia en cualquier dirección. Observe atentamente todo esto, aunque no nos surge ninguna duda de que esto debe ocurrir precisamente así mientras el barco está inmóvil. Ahora haga al barco moverse con cualquier velocidad y entonces (sólo si el movimiento del barco va a ser uniforme y sin balanceos a uno y otro lado) en todos los fenómenos mencionados usted no descubrirá el más pequeño cambio y por ninguno de ellos usted podrá determinar si el barco se mueve o se encuentra inmóvil. Al brincar usted se desplazará sobre el piso a la misma distancia que antes, y no va a hacer brincos más grandes en dirección de la popa que en dirección de la proa, en base a que el barco se mueve rápido, aunque en este tiempo cuando usted va a estar en el aire el piso que se encuentra bajo usted va a moverse en dirección contraria a su brinco, y al lanzar alguna cosa a su compañero usted no la lanzará con más fuerza cuando él se encuentre en la proa y usted en la popa, que cuando sus posiciones sean viceversas; las gotas van a caer como antes en el recipiente inferior y ni una sola caerá más cerca de la popa, aunque mientras la gota se encuentra en el aire el barco recorrerá muchos palmos; los peces en el agua no van a moverse con más esfuerzo hacia la parte frontal que hacia la parte trasera del recipiente y con la misma agilidad se van a lanzar hacia la comida colocada en cualquier lugar del recipiente; y finalmente, las mariposas y las moscas van a volar en todas las direcciones y nunca ocurrirá que se reúnan en la pared dirigida hacia la popa, como si estuvieran cansadas de seguir el rápido movimiento del barco, del cual estuvieron completamente aisladas teniendo que detenerse mucho tiempo en el aire; y si de una gota de incienso se forma un poco de humo, entonces se verá como sube y se detiene al igual que una nube moviéndose indiferentemente tanto a un lado como a otro...».

Los libros de nuestro tiempo no son tan locuaces. En ellos la idea se formula de una manera más corta, en la forma

del *principio de relatividad de Galileo*. Una de estas formulaciones dice: «En un sistema de referencia que se mueve en línea recta y con velocidad constante todos los procesos mecánicos ocurren de la misma manera que en un sistema en reposo», es decir, un poco diferente, «Ningún experimento mecánico puede detectar el movimiento uniforme y rectilíneo de un sistema, si el experimento se realiza dentro del mismo sistema». Solamente asomándose a la ventana del camarote veremos que el barco se mueve, pero incluso en este caso se registra solamente el movimiento de la ribera con respecto al barco. Apoyándose con los codos sobre un mirador de granito del río Nevá se puede uno concentrar e imaginar que se mueve con respecto a las aguas inmóviles del río. El movimiento y su velocidad siempre son relativos, y no puede darse preferencia por ningún experimento ni al observador en la ribera, ni al observador en el barco, siempre que el movimiento sea uniforme. En nuestro tiempo este principio es evidente, y la aclaración de que el movimiento uniforme siempre es relativo parece despojada de información. Digamos, el barco se mueve con respecto a la ribera, el cohete se acelera con respecto a la Tierra, la Tierra gira con respecto a las estrellas inmóviles, todas estas afirmaciones parecen completamente idénticas. Sin embargo, en realidad esto no es así. Dentro de un automóvil que se mueve uniformemente todo ocurre de la misma manera que en un automóvil en reposo (en un automóvil, evidentemente, «imaginario», sin sacudimientos). Pero cuando el automóvil frena bruscamente al encenderse la luz roja del semáforo, entonces el tirón que casi lo saca a usted del asiento testimonia de un modo irrefutable que un sistema acelerado se diferencia de la calle, donde ninguno de los transeúntes se cayó como resultado del cambio brusco de la velocidad relativa del automóvil. De esta manera, la aceleración, a diferencia de la velocidad, se puede medir dentro de un sistema acelerado sin tener que mirar hacia afuera. Lo mismo se puede decir sobre la «relatividad» de la rotación. Incluso en un tiempo nublado, cuando no se ven las estrellas, se puede descubrir la rotación de la Tierra alrededor de su eje. Recordemos los famosos experimentos con el péndulo de Foucault suspendido bajo la cúpula de la Catedral de San Isaac: el plano de oscilación del péndulo gira, y este experimento, realizado dentro de un sistema de referencia sin ninguna mención sobre las estrellas inmóviles, nos demuestra que la rotación

de la Tierra es absoluta. Así es que el principio de la relatividad de Galileo no es una ley de la lógica, sino un resultado del razonamiento sobre experimentos reales que va muy lejos. De este principio se deriva que en cualquier sistema inercial son idénticos tanto la forma de las leyes físicas, como los valores numéricos de las constantes físicas que figuran en estas leyes, por ejemplo, las masas de las partículas. Un mecánico calculará la desviación de la trayectoria de una estación interplanetaria con respecto a Júpiter por las mismas leyes que calcula la desviación con respecto a Saturno, aunque los planetas también se mueven uno con respecto a otro. Los valores de las magnitudes físicas, por ejemplo, de las velocidades de movimiento de los cuerpos, pueden ser distintas en diferentes sistemas de referencia, pero éstas se sujetan a las mismas leyes físicas y a las mismas ecuaciones, y desde el tiempo de Galileo nadie, en ningún laboratorio del mundo, ha podido descubrir desviaciones de este gran principio.

2.2. PRINCIPIO DE RELATIVIDAD DE EINSTEIN

Si ahora nosotros pasamos de la mecánica a la electrodinámica de Maxwell, entonces inmediatamente surge una pregunta no sencilla: ¿es aplicable el principio de la relatividad a los fenómenos electromagnéticos? He aquí lo que escribía sobre esto en 1905 A. Einstein en su famoso artículo «Sobre la electrodinámica de los cuerpos móviles» [1]:

«Es conocido que la electrodinámica de Maxwell en su forma actual da como resultado una asimetría en su aplicación a los cuerpos móviles, la cual parece no ser propia a los mismos fenómenos. Recordemos, por ejemplo, la interacción electrodinámica entre un imán y un conductor con corriente. El fenómeno observado en este caso depende solamente del movimiento relativo del conductor y el imán, al mismo tiempo que, de acuerdo a la idea general, estos dos casos, en los cuales se mueve uno u otro de los cuerpos, deben ser severamente diferenciados. En efecto, si el imán se mueve y el conductor se encuentra en reposo, entonces alrededor del imán surge un campo eléctrico que posee una

[1]) Annalen der Physik, 1905, Bd 17, H. 5.

cierta cantidad de energía, la cual en aquellos lugares donde se encuentran las partes del conductor genera una corriente. Pero si el imán se encuentra en reposo, y el que se mueve es el conductor, entonces alrededor del imán no aparece ningún campo eléctrico; sin embargo, en el conductor aparece una fuerza electromotriz, a la cual por sí misma no le corresponde ninguna energía, pero la cual, en el caso de la supuesta igualdad del movimiento relativo en ambos casos, genera corrientes eléctricas de la misma magnitud y en la misma dirección que el campo eléctrico en el primer caso».

Aún más difícil en aquel tiempo era el problema de la velocidad de la propagación de las ondas electromagnéticas, o sea, de la velocidad de la luz. El asunto es que esta velocidad entra en las ecuaciones de la electrodinámica en forma de un número concreto $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. ¿Pero con respecto a qué se mide esta velocidad?, ¿con respecto a la fuente de radiación, con respecto al receptor móvil o con respecto a cierto medio hipotético, en el cual se propaga la luz, el éter? El mecanismo de propagación de todos los otros tipos de ondas, por ejemplo, de las ondas en el agua o de las ondas sonoras, estaba suficientemente claro, pero las ondas electromagnéticas no entraban en este armonioso cuadro. Parecía que para la existencia de una onda siempre es necesario un medio, en el cual se pueda propagar esta onda; de aquí surgió la hipótesis del éter. Pero entonces, en la naturaleza existiría cierto sistema de referencia separado relacionado con el éter, lo que estaría en contradicción con el principio de relatividad en la mecánica, o sea, de equitatividad de todos los sistemas inerciales de referencia. Esta difícil situación provocó muchas reflexiones y discusiones entre los físicos de fines del siglo XIX y principios del siglo XX.

El punto de vista de Einstein era radical: el principio de la relatividad debe ser cierto también para la electrodinámica, ¡por eso la velocidad de la luz $c = 3 \cdot 10^8$ m/s que entra en las ecuaciones de Maxwell debe ser igual para cualquier observador inercial!

En este mismo artículo Einstein escribía: «Ejemplos del mismo tipo que los desafortunados intentos de descubrir el movimiento de la Tierra con respecto al «medio conductor de la luz» llevan a la suposición de que no solamente en la mecánica, sino también en la electrodinámica ninguna propiedad de los fenómenos corresponde al concepto de reposo

absoluto e incluso, además, llevan a la suposición de que para todos los sistemas de coordenadas, para los cuales son ciertas las ecuaciones de la mecánica, son ciertas las mismas leyes electrodinámicas y ópticas, como esto fue ya demostrado para las magnitudes del primer orden. Nosotros tenemos la intención de transformar esta suposición (el contenido de la cual de aquí en adelante va a ser llamado «principio de relatividad») en una premisa y hacer, además, una suposición complementaria que aparentemente es contradictoria con la primera, y es precisamente que la luz en el vacío siempre se propaga con una velocidad determinada c que no depende del estado de movimiento del cuerpo en cuestión. Estas dos premisas son suficientes para ponerlas como base de la teoría de Maxwell para los cuerpos en reposo y así construir una electrodinámica de los cuerpos móviles sencilla y libre de contradicciones... Los razonamientos posteriores se apoyan en el principio de la relatividad y en el principio de la invariabilidad de la velocidad de la luz. Formularemos ambos principios de la siguiente manera.

1. Las leyes, de acuerdo a las cuales cambian los estados de los sistemas físicos, no dependen de a cuál de dos sistemas de coordenadas, que se mueven uno con respecto al otro uniformemente y en línea recta, corresponden estos cambios de estado.

2. Cada rayo de luz se mueve en un sistema de coordenadas en «reposo» con una velocidad determinada c, independientemente de si este rayo de luz es emitido por un cuerpo en reposo o por un cuerpo móvil. Con esto

$$\text{velocidad} = \frac{\text{recorrido del rayo de luz}}{\text{intervalo de tiempo}}.$$

En 1905 esto parecía una afrenta directa al sentido común y a la intuición. Se necesitaron largos años y el cambio de una generación de científicos para acostumbrarse a la absurda, a primera vista, idea de que cierta velocidad tiene una misma magnitud en diferentes sistemas de referencia que se mueven uno con respecto al otro. Esta idea es verdaderamente sorprendente también desde el punto de vista de los conceptos cotidianos. Imagínese usted un cohete con un proyector encendido que pasa cerca de usted con una velocidad de 100 000 km/s. La velocidad de la luz con respecto al cohete es igual a 300 000 km/s. Si se mide la velocidad de la luz, veremos que es igual no a 400 000 km/s,

cómo se podría esperar, ¡sino a los mismos 300 000 km/s!

La mecánica de Newton también obedece al principio de relatividad. Pero en ella implícitamente se supone que la interacción entre las partículas se propaga instantáneamente, con una velocidad infinitamente grande. Cualquier cambio de posición de una partícula se refleja inmediatamente en todas las demás. Recuérdese la tercera ley de Newton: «las fuerzas, con las cuales interaccionan dos partículas, siempre son iguales en magnitud e inversas en dirección». Sin embargo, el experimento demuestra que cualquier interacción se propaga con una velocidad aunque muy grande, pero finita. El cambio de posición de una partícula, por ejemplo de un electrón cargado, empieza a afectar a otras cargas sólo después de cierto tiempo, necesario para que la interacción que se efectúa a través del campo electromagnético alcance a propagarse de una región del espacio a otra. La interacción entre un emisor y un receptor de radio se efectúa con ayuda de ondas electromagnéticas que se propagan con una velocidad $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s, y la interacción entre un altoparlante y el oído del hombre se efectúa con ayuda de ondas sonoras que se propagan con una velocidad de $3{,}3 \cdot 10^2$ m/s. Entre todas las posibles velocidades de propagación de una interacción hay una velocidad máxima, la más grande posible, $v_{\text{máx}}$. Ninguna partícula puede moverse con una velocidad mayor que $v_{\text{máx}}$, ya que en caso contrario la interacción simplemente se podría transmitir de unos cuerpos a otros con ayuda de tales partículas ultrarrápidas. Del principio de relatividad se desprende que esta velocidad máxima de propagación de las interacciones debe ser una constante universal, igual para todos los sistemas inerciales de referencia. Como lo muestra el experimento, con esta velocidad máxima se propaga en el vacío el campo electromagnético y su caso particular, la luz visible:

$$v_{\text{máx}} = c = 2{,}997\,925 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Se puede hacer la pregunta: ¿por qué precisamente la velocidad de la luz juega un papel fundamental en la naturaleza? ¿No podría ser que la velocidad de las ondas gravitacionales, si es que alguna vez se le logra medir, resulte ser dos veces mayor que la velocidad de la luz, y que precisamente ella sea la nueva velocidad máxima de propagación de una interacción? ¿O puede ser que dentro de cien años se descubra un nuevo tipo de interacción, completamente

desconocido por nosotros por ahora, que se propague con una velocidad de 10 c? A estas preguntas se puede contestar con seguridad: ¡no! En los laboratorios de todo el mundo, en los aceleradores de todos los países diariamente se realiza una cantidad enorme de experimentos de dispersión, formación o interacción de partículas elementales, y cada uno de ellos certifica que en la naturaleza realmente existe una velocidad máxima y que su valor numérico es precisamente igual a 2,997 925·10^8 m/s. Si los ingenieros que proyectan los aceleradores y los físicos que procesan los experimentos realizados en éstos, pusieran en sus fórmulas de cálculo no este número sino cualquier otro, entonces los aceleradores construidos por estos proyectos no podrían funcionar, y los resultados del procesamiento de los experimentos serían contradictorios entre sí y a todo en el mundo. Si en algo en general se puede estar realmente seguro, es de que $v_{\text{máx}} = 2{,}997\,925 \cdot 10^8$ m/s. Por eso, la velocidad de las ondas gravitacionales, si es que alguna vez se le logra medir, forzosamente será menor o igual que $v_{\text{máx}}$. (Por cierto, es lógico pensar que estas interacciones fundamentales, tales como las interacciones gravitacional y electromagnética, se propagan con esta velocidad fundamental 2,997 925× 10^8 m/s.)

La unión del principio de relatividad con la finitud de la velocidad de propagación de las interacciones se llama principio de relatividad de Einstein.

La aplicación consecuente de este principio obligó a desistir de la mecánica de Newton, de la ley de la suma de las velocidades por la regla del paralelogramo (¡recuerden, el ejemplo con el proyector en el cohete!) y de las ideas acostumbradas sobre las propiedades del espacio y el tiempo, pero permitió conservar intacta la electrodinámica de Maxwell. Es necesario decir que cada nueva teoría física no desecha las teorías anteriores como incorrectas, sino que las incluye como casos particulares que son ciertos solamente en determinadas regiones de los fenómenos, y al mismo tiempo traza los límites de su aplicación. Así ocurrió con la teoría especial de la relatividad de Einstein que incluyó la mecánica de Newton en calidad de una buena aproximación a la realidad en los casos cuando las velocidades de los cuerpos en movimiento son pequeñas en comparación con la velocidad máxima de las interacciones $v_{\text{máx}}$. En comparación con las velocidades cósmicas de 10 km/s la velocidad de la luz, 300 000 km/s, ¡es ya casi infinitamente grande!

Capítulo 3
LOS ESPACIOS Y LOS MAPAS

3.1. LOS MAPAS DE VELOCIDADES EN LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Tratemos de trasladar el método de los grafos cinemáticos, sobre el cual se habló en el cap. 1, a la teoría de la relatividad.

Imaginémonos a dos observadores inerciales A y B que se mueven uno con respecto al otro, miden las velocidades de diferentes objetos C, D, E, . . . y escriben en una hoja de papel los resultados de las mediciones de acuerdo a la siguiente regla. Al medir la velocidad del objeto siguiente X, cada uno de nuestros observadores traza en su hoja un vector desde el punto que lo representa a él mismo, cuya longitud en las unidades de medición escogidas es igual a la magnitud de la velocidad del objeto X y la dirección coincide con la dirección de movimiento de este objeto. (Recordemos que se están viendo sólo movimientos uniformes y rectilíneos, que además ocurren en un solo plano, o si se quiere, en planos paralelos a un plano.) El punto sobre la hoja de papel, que corresponde al extremo del vector trazado sirve precisamente como representación de la velocidad del objeto X; se le denota con la misma letra X. Al final de las mediciones sobre las hojas de los observadores A y B aparecerán los conjuntos de los puntos A, B, C, D, E, . . ., a los cuales llamamos mapas de velocidades medidos por los observadores A y B o, brevemente, mapas-ϑ K_A y K_B. La regla de construcción de los mapas ϑ se escribe fácilmente: en el mapa K_A

$$\overrightarrow{AX} = v_{X|A}, \tag{3.1}$$

donde $v_{X|A}$ es el vector de la velocidad del objeto X con respecto al observador A.

Para encontrar con ayuda de estos mapas, digamos, la velocidad del objeto C con respecto a A es necesario medir

la distancia entre los puntos A y C en el mapa K_A; el ángulo entre las direcciones de las velocidades de los objetos D y E con respecto a B es igual a la magnitud del ángulo DBE en el mapa K_B, etc. En el caso no relativista, como ya vimos, los mapas de velocidades de todos los observadores inerciales coinciden: si se sobrepone, por ejemplo, el mapa K_B sobre el mapa K_A para que coincidan los puntos A y B marcados en ellos, entonces coincidirán todos los demás puntos correspondientes C, D, E, . . . Gracias a esto, resulta ser suficiente un solo mapa universal, en calidad del cual puede servir K_A, K_B y K_C, todos estos mapas son iguales. Cualquier punto X del mapa puede servir como punto de referencia y toda la información contenida en el mapa K_X, o sea, todos los datos sobre las velocidades de los diferentes objetos con respecto al sistema de referencia X, ya está contenida en el mapa universal. En esto se apoya el método de los grafos cinemáticos.

En la teoría de la relatividad la situación ya no es la misma. ¡Los mapas de velocidades K_A y K_B de dos observadores diferentes resultan ser diferentes! Recordemos que de acuerdo a la segunda parte del principio de relatividad de Einstein ningún sistema inercial puede moverse con una velocidad superior a cierta velocidad máxima $v_{máx}$, además, esta magnitud no depende del sistema de referencia y es igual a la velocidad de la luz c. Por eso, el observador A, al construir su mapa de velocidades, descubrirá que todos los puntos caen dentro de un círculo con centro en el punto A y radio c. Este círculo es algo así como el mapa de *todas las velocidades imaginables* y el mapa K_A ya no ocupa todo el plano, como era en el caso no relativista. De acuerdo al principio de relatividad también el mapa ϑ del observador B resulta ser un círculo del mismo radio c, pero esta vez en su centro se situará el punto B. ¿Se podrán hacer coincidir estos dos mapas por medio de una simple superposición? Veamos la fig. 3.1: hicimos coincidir los puntos homónimos A y B de los mapas de nuestros dos observadores; es evidente que los círculos mismos K_A y K_B con ello van a cubrirse completamente, pero no van a coincidir. Si se sobrepone un círculo sobre otro para que coincidan, entonces no van a coincidir sus puntos homónimos, por ejemplo, el centro A del círculo K_A coincidirá con el centro B del círculo K_B, pero no con su punto A. (Con todo subrayaremos que en la región no relativista, cuando la

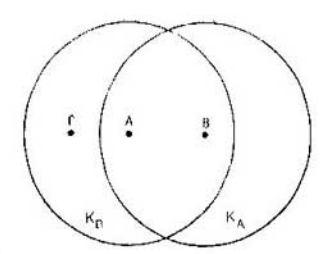


FIG. 3.1

velocidad relativa del movimiento de los observadores A y B es mucho menor que la velocidad de la luz, regiones no muy grandes cerca de los centros de los mapas K_A y K_B prácticamente coinciden al sobreponerlos con una exactitud tanto mayor cuanto menor es la velocidad en cuestión. En esta región actúan las leyes de la cinemática clásica.)

Y sí, el razonamiento sobre el mapa universal del espacio de velocidades que tan exitosamente desarrollamos en el cap. 1, no tiene lugar en la teoría de la relatividad. Los puntos homónimos en los mapas de diferentes observadores están situados de diferente forma, y la distancia del punto B a cualquier otro punto C medida en el mapa K_A, en general no debe ser igual a la distancia entre los puntos correspondientes del mapa K_B, o sea, a la velocidad relativa $v_{C|B}$. Además, en general esta distancia no puede ser mayor que el radio del mapa c (véase la fig. 3.1). Por eso, ahora no tenemos la posibilidad de, teniendo los resultados de las mediciones del observador A que fueron tomados en el mapa K_A, determinar inmediatamente los resultados de las mediciones hechas por otro observador B. En todo caso, las mediciones directas de las distancias en el mapa con ayuda de la regla o el cálculo de estas distancias por medio de las fórmulas de la geometría euclidiana no sirven para este fin. Por lo pronto no contamos con un mapa de velocidades universal relativista, en el cual se pudieran dibujar grafos cinemáticos y después hacer cálculos partiendo de él. Pero no vamos a cruzarnos de brazos. Los geógrafos y los astrónomos ya toparon con la misma situación, por eso las analogías y los ejemplos de estas dos ciencias antiquísimas nos sugerirán la salida.

3.2. UN POCO DE GEOGRAFÍA

Los mapas de la superficie terrestre, desde el plano de una ciudad hasta el mapa de los hemisferios, han formado parte de nuestras cosas más usuales, pero no cualquiera se pone a pensar cómo se hacen estos mapas y cómo se utilizan correctamente. Por ejemplo, ¿cómo encontrar la distancia de Moscú a Jabárovsk por un mapa de la Unión Soviética tomado de un atlas escolar corriente? El método que viene primero a la cabeza, o sea, medir con una regla la longitud del segmento que une los puntos correspondientes en el mapa y multiplicarla por el coeficiente de la escala, ¡es en esencia erróneo! Sólo para distancias relativamente no muy grandes, digamos, desde Moscú hasta Kalinin o Tula, este método da un resultado suficientemente exacto. Una situación parecida nos ha resultado con los mapas de velocidades: si las velocidades de dos sistemas con respecto a un observador *A* son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, entonces la velocidad de uno de ellos con respecto al otro es numéricamente igual a la distancia entre los puntos correspondientes en el mapa-$\mathcal{F}$' K_A, pero al pasar a velocidades cercanas a la velocidad de la luz este método de cálculo de la velocidad por el mapa llevará a errores muy grandes.

Esta analogía, muy importante para nosotros, se puede profundizar. Nos dirigiremos de nuevo a los «cartógrafos» *A* y *B*, pero ahora supongamos que ellos no van a ser observadores en dos sistemas de referencia que se mueven uno con respecto al otro, sino geodestas que se encuentran en dos puntos diferentes. Supongamos que ellos hacen los mapas de alguna región no muy grande, en la cual se encuentran los objetos *C*, *D*, *E*, . . . Para esto, digamos, el geodesta *A*, armado de un telémetro óptico, un goniómetro, instrumentos de dibujo y una hoja de papel, mide una tras otras las distancias hasta *B*, *C*, *D*, *E* y los ángulos entre las direcciones a estos objetos. Al medir la distancia hasta el objeto siguiente *X* y su coordenada angular (azimut), él traza en la hoja de papel un vector desde el punto *A*, que lo representa a él mismo, el cual es igual en longitud (en la escala correspondiente) a esta distancia y está dirigido al objeto *X*, y marca en el mapa su extremo, el punto *X*. Exactamente de la misma manera hace su mapa el geodesta *B*. Es claro que

mientras el asunto se refiere a una región no muy grande de la superficie terrestre que puede ser considerada plana sin cometer un error considerable (se entiende que despreciamos el relieve), el geodesta B trabajará en vano: su mapa no se va a diferenciar del mapa del geodesta A. En otras palabras, un mapa se puede sobreponer sobre el otro de tal manera que los puntos, que son las representaciones de cualquier objeto en ambos mapas, van a coincidir. De esta manera, como en el caso de los mapas de velocidades en la región no relativista, el mapa de una región no muy grande que es prácticamente plana, construido a partir de un punto inicial de referencia, es universal, o sea, que cualquiera de sus puntos se puede tomar como un nuevo punto de referencia y las distancias (en las unidades apropiadas) y los ángulos en el mapa son iguales a las distancias y a los ángulos correspondientes sobre la superficie de la Tierra.

Ahora aumentaremos la región medida y la distancia entre los geodestas. Para que la diferencia sea palpable, mandaremos a A al Polo Norte y a B al ecuador, al «centro» del hemisferio oriental. El principio de construcción del mapa será el mismo: cada geodesta se va a preocupar solamente por anotar correctamente en el mapa las distancias desde el punto donde se encuentra hasta los otros objetos y los ángulos entre las direcciones a todos los objetos posibles desde este punto. En este caso, por distancia entre dos puntos se entiende, por supuesto, la longitud del camino más corto que lleva de un punto a otro sobre la superficie de la Tierra, o sea, como es fácil entender, la longitud del arco de la circunferencia mayor [1]) de la Tierra que une estos puntos. Por ejemplo, la distancia del punto A a cualquier punto X es igual a la longitud del arco AX del meridiano que pasa por el punto X. En la fig. 3.2, *a*, *b* se da una vista aproximada de la red de paralelos y meridianos en los mapas A y B. El semicírculo inferior en la fig. 3.2, *a* y el semicírculo superior en la fig. 3.2, *b* representan una misma parte de la superficie terrestre, el «cuarto» nordestal. Como vemos, estos dos mapas no se pueden sobreponer de tal manera que todos los puntos homónimos coincidan en ellos. Esto significa que las distancias terrestres en nuestros mapac en general se deforman. Esto se ve bien en la fig. 3.2. La distancia

---

[1]) Así se llaman las circunferencias en las cuales la esfera se interseca con los planos que pasan por su centro.

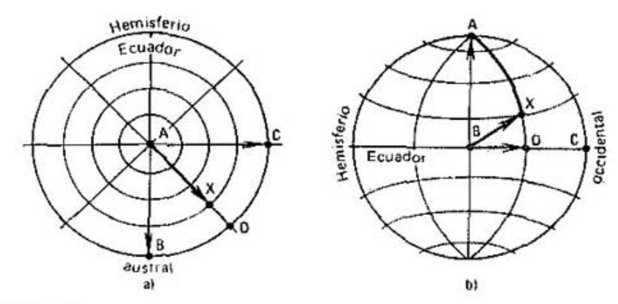


FIG. 3.2

entre dos puntos cualesquiera de los puntos A, B y C sobre la superficie de la Tierra es igual a la cuarta parte de la circunferencia mayor de la esfera terrestre: AB y AC son las cuartas partes de los meridianos y BC es la cuarta parte del ecuador. Al mismo tiempo, en la fig. 3.2, *a* las distancias $|AB|$ y $|AC|$ son iguales (e iguales por su construcción a sus valores reales), pero $|BC|$ es $\sqrt{2}$ veces mayor, y en la fig. 3.2, *b* $|AB| = |BC| \neq |AC|$. Además, las mismas circunferencias mayores, las líneas más cortas sobre la esfera, o sea, las «rectas esféricas», se representan de manera diferente en nuestros mapas, por ejemplo, de los arcos iguales AB, AC, AD y BC el geodesta A representará los tres primeros como segmentos y el cuarto como el arco de una circunferencia (fig. 3.2, *a*), y el geodesta B (fig. 3.2, *b*) sólo representará el camino AB de la misma manera que A y el meridiano AD ¡en general no es ni recta ni circunferencia!

Pero, ¿podrá ser que los defectos de estos mapas estén contenidos en los mapas mismos, o más exactamente, en el método de su construcción? Bueno, vamos a intentar construir los mapas de otra manera.

El proceso de levantamiento de mapas-planos de regiones no muy grandes se puede presentar así. Sea que al anotar en el mapa un punto X, el geodesta A mide con el telémetro óptico la distancia hasta la regla vertical colocada en el punto X. Cuanto más alejado está el punto X, tanto más larga debe ser la regla, ya que la superficie de la Tierra se curva. (Incluso si se toma una regla de la altura de la torre

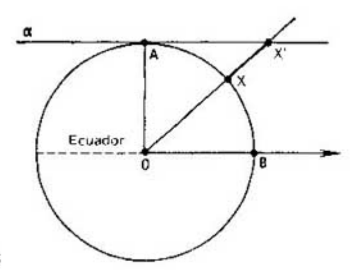


FIG. 3.3

de televisión de Ostánkino, la distancia desde la cual se podría ver dicho punto sería de ¡solamente 80 km!) Sin embargo, esto no nos dificulta imaginarnos cómo se vería el mapa de la Tierra construido con ayuda de estas reglas. El telémetro óptico de nuestro geodesta mide la distancia por la tangente al globo terrestre en el punto A hasta la recta OX, donde O es el centro de la Tierra (fig. 3.3), o sea, la distancia del punto A hasta el punto X' de la intersección de la recta OX con el plano α, que es tangente a la esfera en el punto A. El punto X' se llama *proyección central* del punto X sobre el plano α desde el centro O. Con este nuevo método de levantamiento, el mapa de una región grande de la Tierra se obtiene como resultado de la proyección central de la esfera sobre el plano tangente a ella en el punto A. En comparación con la primera variante, este método tiene una cualidad importante: cualquier «recta esférica», o sea, cualquier circunferencia mayor de la esfera se representa a través de la proyección central como una recta común (por la cual se interseca el plano que contiene esta circunferencia mayor, con el plano α). Pero aunque en los mapas de *ambos* geodestas A y B las líneas más cortas sobre la esfera se representan de la misma manera, con rectas, de todas maneras no es posible hacer coincidir estos mapas. En efecto, incluso si se ocupa todo el plano con el mapa, solamente podremos incluir en él la mitad de la esfera y además sin la circunferencia mayor que la limita, y en el mapa del geodesta A, quién se encuentra en el Polo Norte, en general no se encontrará el punto para el geodesta B, colocado en el ecuador. Para poder comparar, en la fig. 3.4 se da una vista aproximada de la red de los paralelos y meridianos en los mapas A (a) y B (b).

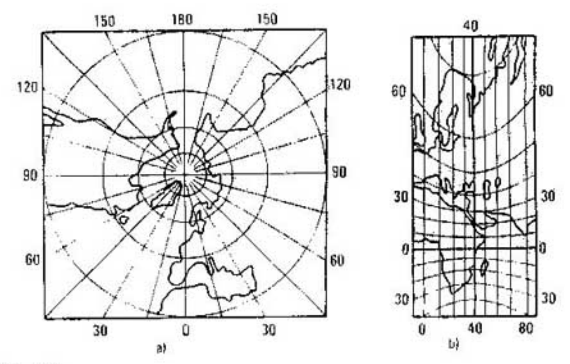


FIG. 3.4

De nuevo fracasa el intento de construir un mapa plano universal de una esfera. Si nos dirigimos a la historia descubriremos que el problema de la representación de la superficie terrestre de una manera cómoda, exacta y completa preocupó al hombre desde tiempos muy remotos. Se conservó el dibujo hecho en los tiempos de Ramsés II, rey de Egipto en el siglo XIII antes de n. e. (fig. 3.5). En él se muestran los caminos y el paso que se encuentra en el camino hacia las minas de oro. En este dibujo no se pueden determinar ni las distancias, ni las direcciones, pero sin embargo se puede ver que sobre el camino inferior se elevan los picos de unas montañas, y que en el camino superior estas montañas se ven ya bajo los pies; aquí las deformaciones nos parecen ya desmedidas. La carta geográfica de Claudio Ptolomeo (siglo II antes de n. e.) que ha llegado hasta nosotros (en su versión en latín) fue levantada en base a la red de coordenadas introducida por Hiparco y fue la más completa durante muchos siglos. Incluso los experimentados navegantes árabes que conocían bien el Mar Mediterráneo, dejaron solamente la descripción verbal de sus riberas, el derrotero. Las cartas de navegación de los siglos XIV—XV, llamadas portulanos, tenían en lugar de una red de coordenadas «rosas de los vientos», abanicos de acimutes en unos cuantos lugares (fig. 3.6). El mapa estaba cubierto por una red de abanicos de colores que permitían determinar el

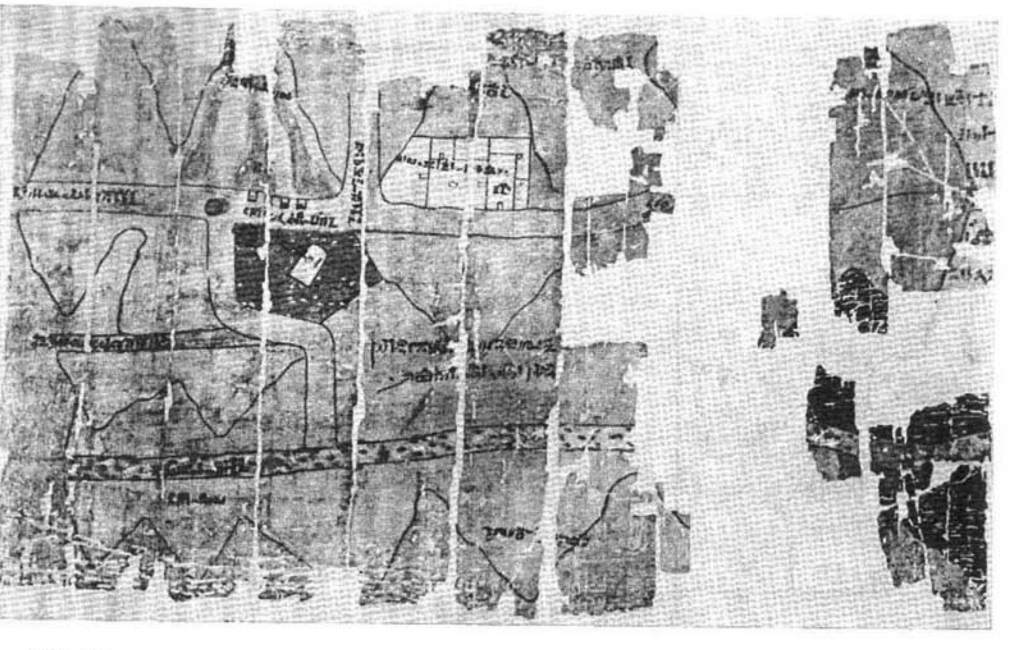


FIG. 3.5

FIG. 3.6

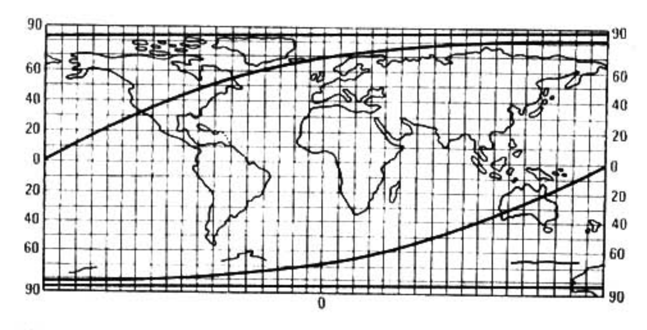


FIG. 3.7

rumbo de un barco con bastante seguridad para aquellos tiempos, pero las distancias entre los puntos eran conocidas mal. El desarrollo impetuoso de la navegación y el comercio en la época de los grandes descubrimientos geográficos hubiera sido imposible sin la creación de cartas geográficas o mapas más perfectos. Un importante paso en esta dirección fue dado por Gerhardus Mercator (sig. XVI). El por primera vez logró crear cartas que transmitían correctamente las magnitudes de los ángulos en la superficie de la Tierra, además en sus cartas los meridianos se representaban por medio de líneas paralelas. Estas cartas geográficas son cómodas sobre todo para la navegación marítima, ya que la recta que une dos puntos cualesquiera en la carta cruza todos los meridianos con un mismo ángulo y, por consiguiente, la misma propiedad posee la línea correspondiente en la superficie de la Tierra, la *loxodromia* (del griego, «que corre inclinada»). Llevar un barco por la loxodromia es lo más fácil, solamente es necesario cuidar que el rumbo forme un ángulo constante con la aguja de la brújula que siempre estará indicando hacia el norte [1]). Las loxodromias que forman un

[1]) En nuestro tiempo, gracias a los modernos medios de navegación, este razonamiento pierde su valor. Es más importante proporcionar la menor longitud del camino, o sea, el movimiento por las circunferencias mayores llamadas en cartografía *ortodromias* (del griego «que corre directamente»). Por eso, tienen una gran importancia las cartas en las cuales las ortodromias se representan con rectas, en particular las cartas que se obtienen por medio de una proyección central.

ángulo recto con los meridianos, son simplemente paralelos, y en el caso de un ángulo agudo éstas son curvas en forma de espirales que rodean en una dirección el Polo Norte y en otra dirección el Polo Sur (en la fig. 3.7 las líneas gruesas abajo y arriba representan una de las loxodromias). Pero también en las cartas en la proyección de Mercator las distancias se representan con distorsiones que crecen rápidamente al acercarse a los polos (una carta completa de este tipo ocuparía una banda infinita).

Después de Mercator fue inventada una gran cantidad de otras proyecciones cartográficas. (Por ejemplo, en la fig. 3.7 se conservan las proporciones a lo largo de cada meridiano y cada paralelo y los ángulos rectos entre ellos, sin embargo, paralelos *diferentes* tienen *una misma longitud.*)

Pero un mapa o una carta geográfica en la que las distancias terrestres se representaran sin distorsiones de todas maneras no fue creada. Ya es hora de «descubrir las cartas», pues tal carta es imposible construirla. De acuerdo al teorema demostrado por Leonardo Euler en 1777, ningún pedazo, incluso un pedazo infinitamente pequeño, de una esfera puede ser convertido en un plano, o sea, proyectado sobre éste de tal manera que la distancia entre dos puntos cualesquiera, medida sobre la esfera, sea exactamente igual a la distancia entre sus representaciones en el plano. La esfera es curva, he aquí por qué en principio es imposible construir una carta plana universal para ella.

Y sin embargo, la carta universal de la Tierra existe y es bien conocida, solamente que no es plana. ¡Es el globo terráqueo! Si nuestros geodestas dibujaran sus mapas no en una hoja de papel plana, sino sobre la superficie de una esfera, entonces ellos, evidentemente, obtendrían mapas iguales, globos terráqueos. El geodesta A que construyó un globo terráqueo en base a los resultados de sus mediciones, efectuadas desde su punto de referencia, puede reconstruir fácilmente los resultados de las mediciones hechas por cualquier geodesta B midiendo las distancias en su globo terráqueo desde el punto B a los otros puntos. Si este globo terráqueo ya fue construido, entonces cualquiera de sus puntos se puede tomar como un nuevo punto de referencia y determinar la distancia hasta cualquier punto del globo, o sea, de la Tierra. ¿No sería correcto suponer que el campo más apropiado para los grafos cinemáticos relativistas es no un plano, sino cierta superficie curva, el «globo de velocidades»?

Y de la misma manera que un globo normal es una copia pequeña de la Tierra, el globo de velocidades ¿no es la copia de cierto «espacio de velocidades» curvado desconocido para nosotros? Esta hipótesis no debe parecernos tan extraña, ya que en la física moderna las hipótesis y los modelos más singulares llevan a resultados y conclusiones correctas. Pero antes haremos un paréntesis más y conoceremos un espacio más ilustrativo y palpable, pero no tan común, cuya geometría es muy cercana a la geometría del espacio de velocidades relativista.

3.3. LOS MAPAS CELESTES Y EL CIELO ESTRELLADO

El segundo ejemplo de los mapas que vamos a ver son los mapas del cielo estrellado. La manera más fácil de obtener un mapa celeste es por medio de la fotografía. Precisamente nosotros vamos a examinar estos mapas-fotografías y vamos a considerar que la toma se hace con el aparato fotográfico más primitivo, con la llamada «cámara obscura». Esta es una caja no transparente, en una de cuyas paredes se hace un orificio pequeño O (diafragma) y en la pared opuesta se fija una placa fotográfica. La estrella A (fig. 3.8) se imprime en el lugar donde la recta OA cruza el plano de la placa. Nosotros ya hemos visto un método análogo para la construcción de las cartas geográficas; recordemos que este método se llama proyección central [1]). Es interesante que el mapa celeste más antiguo de Tales de Mileto que ha llegado hasta nosotros también fue construido por medio de la proyección central.

Intentaremos, con ayuda de los mapas-fotografías celestes y el cielo estrellado, entender la situación con la que chocamos al empezar a estudiar la cinemática relativista. Los mapas de velocidades K_A y K_B hechos por dos diferentes observadores A y B se pueden comparar con dos diferentes fotografías K_A y K_B del cielo estrellado, tomadas en dos posiciones diferentes del aparato fotográfico, cuando está dirigido a la estrella A y a la estrella B. A las mediciones de las magnitudes y las direcciones de las velocidades efectua-

[1]) En cartografía la proyección central también se llama frecuentemente proyección gnomónica (gnomon es el reloj de sol).

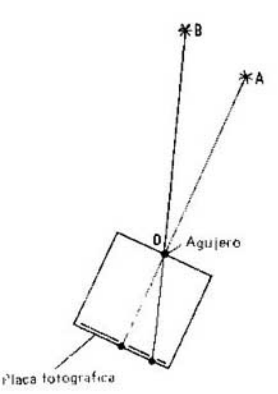


FIG. 3.8

das por cierto observador les corresponden las mediciones de las distancias y los ángulos efectuados directamente según la fotografía dada y el paso de un sistema de referencia a otro es el paso de una fotografía a otra. Así como son diferentes los mapas de velocidades, de la misma manera fotografías diferentes se ven diferentes, y no se les puede hacer coincidir por medio de una simple superposición. Sin embargo, todas las fotografías son en esencia representaciones del mismo cielo estrellado, y la diferencia entre ellas está dada por el cambio de la posición de la cámara. Exactamente igual los mapas de velocidades están relacionados con un sistema de referencia o, si se prefiere, con el «punto de vista» del observador en cuestión y por eso se diferencian uno de otro. Pero con estos mapas incompletos se puede intentar construir un cuadro general, una idea general sobre el espacio de velocidades que ya no dependa de un punto de vista concreto, aunque cada observador lo «vea» a su manera. Para construir este espacio y comprender su estructura, nos será necesario entender como están interrelacionados los datos de las mediciones de diferentes observadores y aprender a transformar un mapa en otro. Cuando este espacio esté construido y estudiado, se podrán olvidar las transformaciones de los mapas de velocidades. Podremos traducir inmediatamente los datos de cualquier observador al lenguaje de este espacio universal y después calcularlos para el sistema de referencia de cualquier otro observador. Recorrer

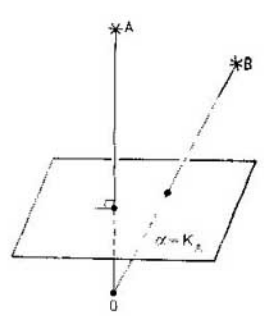


FIG. 3.9

esto camino trazado por nosotros no es fácil, pero para nuestra suerte, es posible conocer sus etapas básicas en el ejemplo más familiar y sencillo del cielo estrellado y sus mapas. Ahora nos dedicaremos a esto.

Primeramente estudiaremos las transformaciones de los mapas celestes. De aquí en adelante nos será más cómodo proyectar sobre el plano α, colocado frente al punto O, y no detrás de él, como en el aparato fotográfico (fig. 3.9). Es claro que esto casi no cambia nada. Del método de construcción de los mapas inmediatamente se deduce que un mapa se obtiene a partir del otro con ayuda de una proyección central. En efecto (fig. 3.10), una estrella cualquiera X se representa en los mapas K_A y K_B por medio de los puntos X_A y X_B, que son los puntos de intersección de una misma recta OX con los planos K_A y K_B, así que, digamos, X_B es la proyección de X_A del centro O sobre el plano K_B. Subrayemos una propiedad evidente pero muy importante de esta transformación: cualquier recta en un mapa se proyecta como una recta en el otro mapa. Esta propiedad

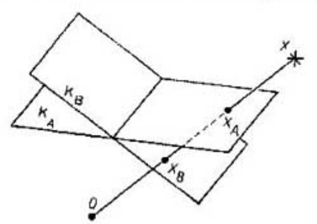


FIG. 3.10

se llama precisamente así, *proyectividad*; a esta propiedad le ha sido dado jugar un papel determinante en el estudio de la geometría del espacio de velocidades relativista.

Ahora pasaremos al estudio de la geometría del cielo estrellado y trataremos de obtener las fórmulas que permitan pasar de un mapa-fotografía a otro, evitando un camino no muy efectivo, la proyección central. Para esto es necesario, antes que nada, construir un modelo matemático apropiado del cielo estrellado, algún espacio, para el cual nuestras fotografías sirvieran como mapas. Notemos que a un punto en la fotografía le corresponde no uno, sino muchos puntos del espacio que nos rodea o, más exactamente, todos los puntos de un *rayo* con origen en el centro de la proyección (el punto de observación) O. Se puede decir que el mapa celeste es un mapa del «espacio», en el cual el papel de puntos es jugado por todos los rayos posibles con un origen O, el *espacio de rayos*. Llegamos a una conclusión un poco inesperada: el modelo más adecuado del «cielo estrellado» es el espacio de rayos. Por otra parte, no hay nada de desacostumbrado en el hecho de llamar «punto» a un rayo. En cualquier libro o artículo de astronomía usted encontrará frases como la siguiente: «la estrella tal se puede ver en tal punto de la esfera celeste», sin embargo, aquí no se sobreentiende que es el punto de cierta esfera e incluso ni siquiera un punto concreto del espacio, se tiene en cuenta que es la dirección a lo largo de la cual es necesario mirar para poder ver la estrella. Desde luego, no hubiera habido necesidad de hablar del espacio de rayos si todo se hubiese limitado a llamar «puntos» a los rayos. La esencia del asunto es más profunda: resulta que el espacio de rayos posee una geometría no menos rica que la geometría euclidiana del plano.

Al empezar a hablar de esta geometría, antes que nada debemos aclarar el sentido que tienen en el espacio de rayos los conceptos geométricos básicos: distancia, recta y ángulo. Esto es muy fácil: nosotros a veces en la práctica los utilizamos sin darnos cuenta de ello. Recordemos, por ejemplo, la regla bien conocida para el cálculo aproximado de la posición de la Estrella Polar: imaginariamente se unen las dos estrellas extremas del cucharón de la Osa Mayor (α y β en la fig. 3.11) con una recta y en ésta se marca cinco veces la distancia entre ellas. Cualquiera de nosotros, sin pensar, puede hacer esta construcción imaginaria. Pero si se profundiza en lo que realmente se está haciendo, entonces usted

4—01123

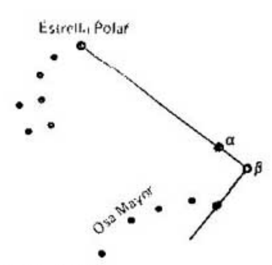


FIG. 3.11

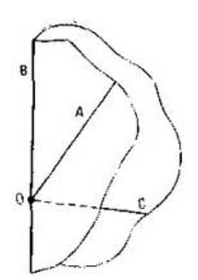


FIG. 3.12

entenderá como es necesario definir los conceptos básicos de la geometría de los rayos. (Sus nombres los vamos a tomar entre comillas para evitar confusiones con los conceptos de la geometría común.)

Y así, como «distancia» entre dos «puntos»-rayos *OA* y *OB* tomaremos la magnitud del ángulo *AOB*. Para simplificar la escritura vamos a denotar los «puntos» *OA*, *OB*, . . . con letras tipo semigrueso **A**, **B**, . . ., y la «distancia» entre **A** y **B** con el símbolo $|\mathbf{AB}|_L$. Es natural llamar «recta» en un espacio de rayos al conjunto de todos los rayos-«puntos» que se encuentran en un mismo plano, «segmento» **AB**, al ángulo plano *AOB*, «ángulo» **ABC**, al ángulo entre los semiplanos *AOB* y *COB* con la frontera *OB* (fig. 3.12).

En base a estos conceptos es fácil continuar la lista de definiciones de la geometría de los rayos por analogía con la geometría común. En esencia, la geometría de los rayos es un lenguaje cómodo, con el cual se pueden describir diferentes propiedades geométricas de las figuras formadas por rayos con un origen común. Es digno de asombro que en este lenguaje podemos utilizar palabras del lenguaje de la planimetría y, lo que es más importante, formar con ellas una gran cantidad de frases que son igualmente ciertas en ambas interpretaciones. Resulta que la geometría del espacio de rayos en muchos sentidos es cercana a la geometría del plano euclidiano, lo cual no es muy evidente a primera vista. Vale la pena subrayar esta circunstancia, ya que en el espacio de velocidades relativista, más alejado del plano por su propia naturaleza que el espacio de rayos, también descubrimos sus rectas, ángulos, distancias, etc.

3.4. GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE RAYOS

La geometría de los rayos es simplemente una de las ramas de la estereometría, y todos sus teoremas pueden ser demostrados con ayuda de construcciones y razonamientos espaciales comunes. Pero no vamos a olvidar que el espacio de rayos es solamente un polígono de prueba, en el cual pulimos los métodos de estudio de la geometría del espacio de velocidades. Y a éste lo tendremos que estudiar casi a ciegas, sin tener idea de cómo se ve. Todo lo que podemos saber sobre él está contenido en los mapas de velocidades. Por eso, vamos a hablar de cómo se obtienen los teoremas sobre el espacio de rayos, utilizando sus mapas-fotografías. La idea básica es sencilla. Primero aclararemos cómo la estructura geométrica del espacio de rayos se refleja en sus mapas y deduciremos las reglas exactas que permiten pasar del espacio a los mapas y viceversa. Después de esto, con su ayuda, se podrá transformar cualquier hecho geométrico cierto para los mapas, o sea, en la planimetría euclidiana común, en un teorema de la geometría de los rayos.

Al lector que no tiene inclinación o no está acostumbrado a entrar en el espeso bosque de los detalles matemáticos le recomendamos omitir el texto que viene más adelante hasta la pág. 56. Es conveniente regresar a este texto antes de leer los apartados 4.5 y 4.6, en los cuales la misma idea general e incluso detalles del razonamiento se aplican para la deducción de fórmulas de la geometría del espacio de velocidades relativista.

Recordemos que por su construcción cada rayo («punto») se representa en el mapa con un punto, en el cual aquél se interseca con el plano del mapa. Para concretizar vamos a considerar que la distancia desde este plano hasta el punto O, el origen de los rayos, es igual a 1. Como K_A designaremos el mapa, cuyo plano es perpendicular al rayo OA (fig. 3.9).

Es evidente que las «rectas» del espacio de rayos se representan en los mapas-fotografías como rectas comunes y los «ángulos» y «segmentos», por regla, como ángulos y segmentos comunes [1]). Las magnitudes de los «ángulos» y las longi-

[1]) Por cierto, algunas veces un «ángulo» puede representarse con una banda o un semiplano y un «segmento», con un rayo. ¡Piensen cuándo sucede esto!

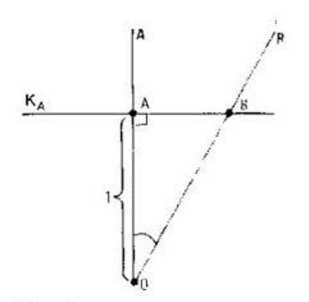


FIG. 3.13

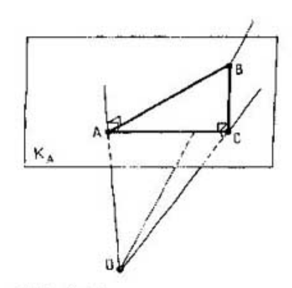


FIG. 3.14

tudes de los «segmentos» al pasarlas al mapa, claro está, se deforman; sin embargo, en los casos más sencillos es fácil encontrar fórmulas que relacionan las distancias y los ángulos, que nosotros medimos con una regla y un transportador directamente en los mapas, con las «distancias» y «ángulos» correspondientes en el espacio de rayos. La dependencia más sencilla se obtiene cuando por el mapa K_A se determinan las «distancias» desde el «punto» A y las magnitudes de los «ángulos» con vértice en este «punto».

Sean A, B, C las representaciones de los «puntos» A, B, C en el mapa K_A. Entonces, primeramente, la distancia euclidiana $|AB|$ (fig. 3.13) es igual a $|OA|\ \mathrm{tg}\ \widehat{AOB}$ y, ya que $|OA| = 1$ y la magnitud del ángulo AOB es la «distancia» entre los «puntos» A y B del espacio de rayos,

$$|AB|_A = \mathrm{tg}\ |AB|_L, \qquad (3.1a)$$

donde como $|AB|_A$ se denota la distancia medida en el mapa K_A. En segundo lugar, el ángulo BAC (fig. 3.14) se obtiene en la intersección del ángulo diedro $B\ (OA)\ C$ con el plano del mapa K_A, que es perpendicular a su arista OA y, por consiguiente, es un ángulo lineal de este ángulo diedro, o sea, es igual en magnitud al «ángulo» BAC en el espacio de rayos:

un «ángulo» con vértice en el «punto» A se representa en el mapa K_A sin deformaciones. (3.2)

Veamos un caso particular más bastante útil, en el cual la dependencia buscada es tan sencilla. Supongamos que el

«ángulo» ACB en el espacio de rayos es un ángulo recto. Entonces (fig. 3.14) el plano OBC es perpendicular al plano OAC; pero también el plano ABC es perpendicular al plano OAC (porque éste es perpendicular a la recta OA). Por eso, la recta BC, en la cual se intersecan los planos OBC y ABC, también es perpendicular al plano OAC, y por lo tanto, los ángulos BCO y BCA son ángulos rectos.

En primer lugar, de aquí se deriva que

> *un «ángulo recto» en el espacio de rayos, cuyo lado pasa por el «punto» A (el «ángulo» BCA), se representa en el mapa K_A con un ángulo recto euclidiano* (el ángulo BCA). (3.3)

En segundo lugar, del triángulo OBC con el ángulo recto en el vértice C, encontramos que $|BC| = |OC|\,\mathrm{tg}\,\widehat{BOC}$, pero $|OC| = |OA|/\cos\widehat{AOC}$, y $|OA| = 1$, o sea,

$|BC|_A = \mathrm{tg}\,|BC|_L/\cos|AC|_L$, si ABC es un ángulo recto. (3.4)

Ahora podemos deducir las relaciones entre los lados y los ángulos de los «triángulos» en el espacio de rayos, en otras palabras, entre los ángulos planos y los ángulos diedros de los ángulos triedros[1]). En efecto, las dependencias (3.1) ... ...(3.4) permiten expresar los elementos (las longitudes de los lados y los ángulos) del triángulo rectángulo ABC en el mapa K_A a través de los elementos del «triángulo» correspondiente ABC (véase más abajo las fórmulas (3.5)). Por eso, es suficiente tomar cualquier relación entre los elementos del triángulo rectángulo «euclidiano» ABC, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, sustituir las cantidades que entran en ella por sus expresiones a través de los elementos del «triángulo» ABC, ¡y ya está preparada la siguiente relación métrica de la geometría de los rayos! Al combinar los resultados obtenidos encontraremos nuevas fórmulas, entre las cuales habrá algunas que no tengan una analogía directa con la geometría euclidiana. Y de los «triángulos» rectángulos no es difícil pasar a cualquier tipo de triángulo.

---

[1]) Estas relaciones, probablemente, son conocidas por muchos de nuestros lectores. Véase, por ejemplo, el libro «Geometría-9» bajo la redacción de Z. A. Skopets (en ruso).

Denotemos las «longitudes» de los lados AB, BC, CA del «triángulo» ABC en el espacio de rayos como c, a, b correspondientemente y las magnitudes de los «ángulos» de los vértices A, B, C como α, β y γ. De una manera análoga, las longitudes euclidianas de los lados del triángulo ABC, que representa al «triángulo» ABC en el mapa K_A, serán denotadas como c_1, a_1, b_1, y sus ángulos como $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Primero supongamos que el «triángulo» ABC es un triángulo rectángulo y $\gamma = \pi/2$; entonces de las relaciones (3.1)...(3.4) se deriva que

$$c_1 = \operatorname{tg} c, \quad b_1 = \operatorname{tg} b, \quad a_1 = \operatorname{tg} a/\cos b, \qquad (3.5)$$
$$\hat{A} = \alpha, \quad \hat{C} = \gamma = \pi/2.$$

Deduciremos algunas de las relaciones métricas más características para el «triángulo» ABC.

Un cateto, la hipotenusa y el ángulo entre ellos. En el mapa tiene lugar la fórmula $b_1 = c_1 \cos \hat{A}$; de aquí, debido a (3.5), en el espacio de rayos

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha. \qquad (3.6)$$

Dos catetos y el ángulo adyacente a uno de ellos. En el mapa: $a_1 = b_1 \operatorname{tg} \hat{A}$; en el espacio de rayos: $\operatorname{tg} a/\cos b = \operatorname{tg} b \operatorname{tg} \alpha$ ó

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{sen} b \operatorname{tg} \alpha. \qquad (3.7)$$

Dos catetos y la hipotenusa (teorema de Pitágoras). En el mapa: $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$. En el espacio de rayos: $\operatorname{tg}^2 c = \operatorname{tg}^2 a/\cos^2 b + \operatorname{tg}^2 b$. Transformaremos esta igualdad utilizando la identidad $\operatorname{tg}^2 x + 1 = 1/\cos^2 x$:

$$\frac{1}{\cos^2 c} = \operatorname{tg}^2 c + 1 = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2 b} + \operatorname{tg}^2 b + 1 =$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^2 a}{\cos^2 b} + \frac{1}{\cos^2 b} = \frac{1}{\cos^2 a \cos^2 b}$$

ó $\cos^2 c = \cos^2 a \cos^2 b$. Si las «longitudes» de los lados del «triángulo» ABC, o sea, los ángulos AOB, BOC, AOC no son mayores que $\pi/2$ (lo que prácticamente se sobreentiende, ya que en caso contrario el «triángulo» ABC no cabría en el mapa K_A; véase la fig. 3.14), entonces los números $\cos c$, $\cos a$ y $\cos b$ son positivos, por lo tanto,

$$\cos c = \cos a \cos b. \qquad (3.8)$$

Este es el «teorema de Pitágoras» en la geometría de los rayos. No es difícil demostrar que efectivamente la fórmula (3.8), así como (3.6) y (3.7), es cierta para cualquier «triángulo» rectángulo.

Deduciremos la siguiente relación partiendo de (3.7) y (3.8). Desde el punto de vista de la geometría euclidiana esta relación aparece de una manera inesperada.

Dos ángulos y la hipotenusa (!). Todas las fórmulas que hemos demostrado expresan determinados hechos de la geometría de los rayos y por sí mismas no tienen ninguna relación con ningún mapa. Por ejemplo, una relación del tipo (3.7) es igualmente cierta para ambos ángulos no rectos [1]) de un «triángulo», en particular, $\operatorname{tg} b = \operatorname{sen} a \operatorname{tg} \beta$. Multiplicando los primeros y, respectivamente, los segundos miembros de esta igualdad y de la igualdad (3.7), obtendremos $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ ó $\cos a \cos b = \operatorname{ctg} \alpha \times \times \operatorname{ctg} \beta$. De aquí, por el «teorema de Pitágoras» (3.8) tenemos

$$\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \cos c \qquad (3.9)$$

Y así, conociendo los dos ángulos no rectos de un «triángulo» rectángulo se puede calcular su «hipotenusa» y, por lo tanto, los «catetos»; de esta manera, en este caso un «triángulo» del espacio de rayos se determina completamente por sus ángulos. Además, resulta que dos «triángulos» cualesquiera con ángulos correspondientemente iguales ¡son congruentes!

Se puede obtener un corolario interesante más de (3.9) si se toma en cuenta que $\cos c < 1$ y por eso $\operatorname{ctg} \alpha < < \operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} (\pi/2 - \beta)$. De aquí se deriva que $\alpha > \pi/2 - - \beta$ o sea, que la suma de los ángulos $\alpha + \beta + \gamma = \alpha + + \beta + \pi/2$ de un «triángulo» rectángulo ABC es mayor que π. Esto también se puede demostrar para un «triángulo» arbitrario dividiéndolo en triángulos rectángulos.

El siguiente paso es aprender a «resolver» cualquier triángulo en el espacio de rayos. Pero aquí nos detendremos, dando sólo una relación más:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha. \qquad (3.10)$$

Esta relación se llama «teorema de los cosenos» de la geometría de los rayos (y, juzgando por la escritura, es digna

[1]) No decimos ángulos «agudos», porque en un «triángulo» rectángulo se pueden tener incluso dos ángulos obtusos (dé un ejemplo).

de llevar ese nombre). El lector puede conocer el «teorema de los senos» y uno más (!) de «los cosenos» en el suplemento 4 de este capítulo. Todos estos teoremas se demuestran exactamente de la misma manera que los teoremas homónimos de la geometría de las velocidades relativistas, sobre los que vamos a hablar detalladamente en el apartado 4.6.

Para terminar la plática sobre el espacio de rayos, queremos disculparnos porque conscientemente hemos tratado de conservar en secreto el mayor tiempo posible su identidad verdadera. Por cierto, confiemos en que nuestro lector perspicaz hace tiempo que ya descubrió este pequeño secreto: el espacio de rayos y la esfera ¡ son en esencia una misma cosa! En efecto, veamos una esfera con radio 1 y con centro en el punto O, el origen de todos los rayos. A cada uno de sus puntos P le corresponde uno y solamente un «punto» P del espacio de rayos, el rayo OP. Con esto, la «distancia» entre dos «puntos» cualesquiera P y Q, o sea, el ángulo $\widehat{POQ}$, evidentemente, es igual en magnitud a la longitud del arco PQ de la circunferencia mayor de la esfera. Pero esta longitud es, precisamente, la distancia entre los puntos P y Q *medida sobre la esfera*. Además, a cualquier «recta» del espacio de rayos (plano) le corresponde una «recta esférica» (la circunferencia mayor, que es la intersección de este plano con la esfera). En general, a cualquier concepto de la geometría de los rayos le va a corresponder un concepto completamente adecuado de la geometría esférica, y cualquiera de las fórmulas (3.6)...(3.10) se puede leer como una fórmula de la «trigonometría esférica», por ejemplo, el «teorema de los cosenos» (3.10) puede servir con el mismo éxito para la determinación de la distancia angular entre las estrellas B y C por un mapa celeste K_A y para el cálculo de la distancia entre Moscú y Jabárovsk por un mapa geográfico. Como dice un conocido aforismo: las matemáticas son el arte de llamar diferentes cosas con nombres iguales, y las mismas cosas con nombres diferentes. Utilizando nuestra terminología cartográfica, se puede decir que la esfera es *el mapa universal* del espacio de rayos. Y nosotros sabemos que estos mapas, los globos celestes, se usan en realidad. El espacio de rayos y el proceso de construcción de su mapa universal se pueden incluso ver personalmente en el planetario, donde los rayos que salen del aparato de proyección proyectan las imágenes de las estrellas y planetas sobre una cúpula esférica.

3.5. ¿QUÉ ES EL ESPACIO DE VELOCIDADES?

Los ejemplos que hemos visto nos permiten suponer que los diferentes mapas de velocidades se pueden entender como las diferentes imágenes planas de un espacio único, como si fueran sus «fotografías» hechas con diferentes escorzos. Además, en la teoría de la relatividad este espacio, a juzgar por todo lo que se conoce, es encorvado, y por eso no se logra representarlo en el plano de una manera exacta, sin deformaciones. Ahora nuestra tarea es desarrollar esta idea y, antes que nada, establecer el sentido que tienen en la geometría de las velocidades las palabras «punto», «recta», «distancia», etc. Debemos aprender a hablar de la cinemática en el lenguaje de la geometría.

Veamos como se resuelve este problema en el caso no relativista, del cual ya nos ocupamos en el cap. 1. Entonces nosotros casi pudimos prescindir de todo tipo de ideas abstractas sobre el «espacio de velocidades», sus «puntos», «rectas» y cosas parecidas, pues así de evidente y limitada era la relación entre la cinemática y la geometría euclidiana. Recordemos: al elegir en el plano un punto arbitrario A que corresponde a algún sistema inercial de referencia A y al cotejar cualquier objeto X que se mueve con una velocidad constante (a un sistema de referencia, a un cuerpo material, a una partícula, a un observador, a cualquier cosa) con un punto del plano X de acuerdo a la regla $\overrightarrow{AX} = v_{X|A}$, nosotros obtenemos un mapa de velocidades K_A. Y aquí tenemos suerte. Podemos olvidar que empezamos con un cierto sistema de referencia A. En la relación establecida entre los puntos del plano y los sistemas inerciales de referencia, todos los puntos y todos los sistemas resultan equitativos. En virtud de la regla de la suma de las velocidades, para dos sistemas *cualesquiera* B y C el vector de la velocidad relativa $v_{C|B}$ será igual en magnitud y dirección al vector $\overrightarrow{BC}$ que une los puntos correspondientes del plano. Por eso, cualquier problema sobre las velocidades relativas momentáneamente se transforma en un problema de la planimetría euclidiana.

En la teoría de la relatividad la situación es diferente. En el mapa de velocidades relativista del observador A,

en el círculo K_A se destaca un punto, su centro A. La ley clásica de la suma de las velocidades aquí no tiene lugar, y la simple igualdad $\overrightarrow{AX} = v_{X|A}$, que la ponemos de base de la construcción del mapa-$\mathcal{T}$ K_A, ya no se puede aplicar a dos puntos cualesquiera de este mapa. Los mapas de velocidades que en el caso no relativista se les podía identificar uno con otro e inmediatamente verlos como un espacio de velocidades *universal*, ahora son *diferentes* proyecciones planas de *un mismo* espacio «universal». Por adelantado no sabemos nada sobre este espacio, es por eso que debemos empezar por las *definiciones de los conceptos geométricos básicos* en el espacio de velocidades. Y ya que el lenguaje geométrico está llamado a servir para la solución de los problemas de la cinemática, entonces también es necesario expresar estos conceptos a través de las magnitudes básicas que se examinan en la cinemática, o sea, directamente a través de las *velocidades relativas.* Esto es muy fácil de hacer en el caso no relativista, ya que cualquier concepto de la geometría euclidiana puede ser descrito con ayuda de vectores, y el vector que une dos puntos en el espacio de velocidades no relativista simplemente es igual al vector de la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia correspondientes. Trataremos de aplicar las definiciones obtenidas de esta manera a la teoría de la relatividad.

Y así, supongamos que a cada sistema inercial de referencia se le ha puesto en correspondencia sólo un *punto* de cierto conjunto del *espacio $\mathcal{T}$ de velocidades* En el caso no relativista, en calidad de este conjunto se puede tomar un plano. En la teoría de la relatividad ya no tenemos una idea tan ilustrativa sobre este espacio, pero al fijar el sistema de referencia A, podemos por procedimiento estándar representar este espacio en el plano en forma de un círculo, del mapa de velocidades K_A. Con ello, a cada punto X del mapa le corresponde justamente un solo sistema inercial X (que se mueve con respecto al sistema A con la velocidad $v_{X|A} = \overrightarrow{AX}$) y, por lo tanto, exactamente un solo punto del espacio de velocidades $\mathcal{T}$:

> *a cualquier objeto X que se mueve uniformemente y en línea recta con respecto a los sistemas inerciales de referencia le corresponde un punto único en el espacio de velocidades* (el cual de en adelante vamos a denotar como $\mathbf{X}$) aquí

Claro, este mismo punto también corresponde a todos los otros objetos que se encuentran inmóviles en el sistema en reposo X. Algunas veces nos será más cómodo decir que «el punto X representa en el espacio $\mathcal{T}$ la *velocidad* del objeto X». Esto no es totalmente correcto, pero completamente entendible: prefijando cualquier sistema de referencia A, nosotros podremos conocer todo lo posible sobre la velocidad relativa $v_{X|A}$ en base a la disposición de los puntos X y A en el espacio de velocidades.

Ahora es necesario traducir al lenguaje cinemático las palabras «recta», «ángulo», «distancia». Estos y otros conceptos de la geometría de las velocidades con frecuencia los llamaremos brevemente recta $\mathcal{T}$, ángulo $\mathcal{T}$, etc.

Empecemos por las *rectas* $\mathcal{T}$. Tres puntos A, B y C del espacio de velocidades no relativista, del plano euclidiano, se encuentran en una recta cuando y sólo cuando los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son colineales ,o sea ,cuando son colineales los vectores de las velocidades $v_{B|A}$ y $v_{C|A}$. Nosotros podemos trasladar sin ninguna dificultad esta condición al espacio $\mathcal{T}$ relativista. Y así, *un punto-*$\mathcal{T}$ *C se encuentra en una recta-*$\mathcal{T}$ *AB cuando y sólo cuando las velocidades relativas* $v_{C|A}$ y $v_{B|A}$ *son colineales.* En el mapa de velocidades del observador A los puntos A, B y C se encuentran en una recta, más exactamente, en uno de los diámetros del círculo K_A. Es evidente que lo mismo también es cierto para los mapas-$\mathcal{T}$ K_B y K_C. Aclararemos el sentido ilustrativo de nuestra definición. Ya que nos interesan solamente las velocidades relativas, y no el lugar donde se encuentran los observadores A, B y C, entonces se puede considerar que en cierto momento ellos se encontraban en el mismo punto. Entonces desde el punto de vista de cualquiera de ellos, los otros dos observadores se van a mover con velocidades constantes por un mismo «camino» recto, en el cual se encuentra él mismo. Por ejemplo, unos ciclistas que se desplazan con velocidades constantes (pero, probablemente, diferentes) por un tramo recto de una carretera, un operador de televisión que pasa volando sobre ellos en un helicóptero y un comentarista de televisión que se encuentra en el final de la carrera, todos ellos se representan en el espacio de velocidades con los puntos de una misma recta $\mathcal{T}$.

En el caso no relativista el ángulo-$\mathcal{T}$ BAC entre los rayos-$\mathcal{T}$ AB y AC, evidentemente, es igual al ángulo entre los vec-

tores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, o sea, al ángulo entre los vectores de las velocidades $v_{B|A}$ y $v_{C|A}$ de las partículas B y C desde el punto de vista de un observador en el sistema de referencia A. Debemos conservar esta relación también en la teoría de la relatividad. En efecto, se pueden disminuir las magnitudes de las velocidades de las partículas B y C con respecto al observador A sin cambiar sus direcciones. En el espacio de velocidades los puntos $\mathscr{V}$ correspondientes B y C se van a acercar hacia el punto-$\mathscr{V}$ A por dos rayos, por los lados del ángulo **BAC**. Con esto, el ángulo-$\mathscr{V}$ BAC y el ángulo entre los vectores de las velocidades, evidentemente, van a conservarse constantes, y en el límite no relativista, cuando las velocidades se hagan pequeñas en comparación con la velocidad de la luz, obtendremos que

$$\widehat{BAC} = v_{B|A} \cdot v_{C|A}.$$

Hasta ahora todo ha funcionado sin problemas, las definiciones se trasladaban por sí mismas del caso clásico al caso relativista. Pero ahora, cuando nos acercamos al último y, probablemente, el más importante momento, la definición de *la distancia* $\mathscr{V}$, chocamos con una particularidad que es propia precisamente de la teoría de la relatividad y que está relacionada con el carácter limitado de la velocidad de la propagación de las interacciones. La distancia entre dos puntos A y B del espacio de velocidades no relativista es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$, o sea, a la magnitud de la velocidad relativa $v_{B|A}$: $|AB| = v_{B|A}$. Esta fórmula concuerda maravillosamente con la ley clásica de la adición de velocidades. En efecto, veamos los sistemas de referencia B y C que se mueven en una misma dirección con respecto al sistema A de tal manera que en el espacio de velocidades los puntos A, B y C se encuentran en una recta, además, B se encuentra entre A y C. Entonces la distancia $|AC|$ es igual a la suma $|AB| + |BC|$, ó $v_{C|A} = v_{B|A} + v_{C|B}$, como debe de ser. Pero en la teoría de la relatividad la ley común de la adición de velocidades no tiene lugar, de lo contrario como resultado de la adición de velocidades suficientemente grandes se podrían obtener velocidades superiores a la velocidad de la luz. Por otro lado, nosotros queremos que la «ley de la adición de velocidades» $|AC| = |AB| + |BC|$ se cumpla también en el espacio de ve-

locidades relativista. Por eso, tendremos que reemplazar la igualdad $|AB| = v_{B|A}$ por una dependencia más general

$$\|AB\| = r(v_{B|A}). \tag{3.11}$$

donde $\|AB\|$ es la distancia $\mathcal{F}$' relativista y $r(v)$ es cierta función desconocida que viene a coordinar la ley de la adición de distancias en el «globo» $\mathcal{F}$' y la ley relativista de la transformación de velocidades. Nosotros podremos encontrar la forma explícita de la función $r(v)$ solamente cuando aprendamos a expresar la velocidad $v_{C|A}$ a través de $v_{B|A}$ y $v_{C|B}$. A esto está dedicada una buena parte del siguiente capítulo. Sin embargo, ya ahora se puede afirmar que para las velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz ($v \ll c$), esta función va a ser prácticamente lineal: $r(v) \approx kv$, porque estas velocidades se suman casi de acuerdo a la ley clásica. En el otro extremo de la escala de velocidades se encuentran los fotones, los cuales, de acuerdo al principio de relatividad de Einstein, se mueven con una misma velocidad $v_{máx} = c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s con respecto a cualquier observador inercial. Los puntos que les corresponden en el espacio de velocidades deben estar equidistantes de *todos* los otros puntos (puntos «comunes»). ¿Cómo se puede coordinar esto con la «ley de la adición de velocidades»? Solamente hay una salida: considerar que a los fotones les corresponden puntos singulares «infinitamente alejados» del espacio $\mathcal{F}$', los cuales se encuentran a una distancia infinita de cualquier punto común. Con ello se obtiene que $r(c) = \infty$ y $r(v) \to \infty$ para $v \to c$. El conjunto de puntos infinitamente alejados se llama *absoluto* del espacio $\mathcal{F}$'. El absoluto es como si fuera la línea del horizonte del espacio de velocidades: por más que se acerque uno al absoluto, él se conserva de la misma manera infinitamente alejado. Es claro que en el mapa K_X el absoluto se representa con una circunferencia de frontera.

Puede parecer extraño que el principio de la relatividad y la exigencia de finitud de la velocidad de propagación de la luz lleven a que el espacio de velocidades $\mathcal{F}$' sea infinito, aunque cualquiera de sus mapas K_X es un círculo finito de radio c. Pero no hay nada de extraño en esto, simplemente la función $r(v)$ es tal que cuando v tiende hacia la velocidad de la luz c, $r(v)$ tiende hacia el infinito. Se pueden idear muchas funciones de este tipo, pero no todas satisfacen el prin-

cipio de relatividad. Cuál de estas funciones es precisamente la que la satisface, lo estableceremos en el siguiente capítulo.

3.6. CÓMO ES EL ESPACIO DE VELOCIDADES RELATIVISTA

Daremos un paso importante: veremos qué condiciones impone sobre la geometría del espacio el principio de relatividad de Einstein y trataremos de explicar por qué ésta debe ser la geometría de Lobachevski. Esto nos ocupará algunas de las siguientes páginas y ... algunos de los siguientes capítulos. Los caminos de las premisas físicas a las fórmulas exactas y lacónicas pueden ser diferentes. En los siguientes capítulos no solamente sabremos sobre la relación íntima entre la cinemática relativista y la geometría de Lobachevski, sino que también conoceremos esta geometría con suficiente detalle. Pero por ahora tomaremos otro camino, que nos permite determinar rápidamente la construcción general del espacio de velocidades relativista, pero no vamos a obtener ninguna fórmula concreta. Para reproducir los detalles del razonamiento, tendríamos que salir muy afuera de los límites del programa escolar de matemáticas, por eso nos limitaremos a explicaciones no muy rigurosas, y por lo pronto el lector tendrá que creer mucho de buena fe

La primera parte del principio de relatividad exige que todos los sistemas inerciales sean completamente equitativos. En el lenguaje geométrico esto significa que el espacio de velocidades en cada uno de sus puntos [1]) debe estar constituido de una manera idéntica. Esta condición de *homogeneidad* es muy rígida. Por ejemplo, con su ayuda Euclides intentó separar *las líneas rectas* de todas las demás líneas sobre el plano. La definición 4 de «Los elementos» dice «La recta es una línea que está igualmente dispuesta con respecto a los puntos sobre ella». El autor de «Los elementos» no puso atención en que las circunferencias también poseen esta propiedad. ¡No hay otras líneas de este tipo en el plano! Por cierto, a nosotros nos interesan los espacios no de una dimensión, sino bidimensiones, las superficies Dos ejemplos

[1]) En esta sección no vamos a examinar los puntos «singulares» del absoluto.

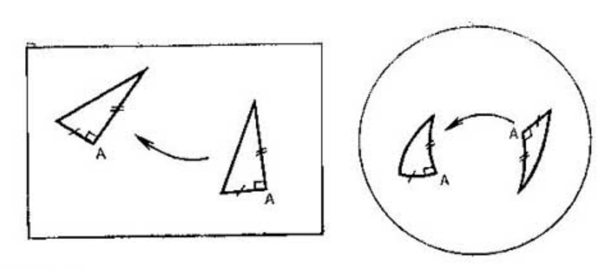


FIG. 3.15

de superficies homogéneas nos son bien conocidos, son el plano (el espacio de velocidades no relativista) y la esfera. La «homogeneidad» de estas superficies se manifiesta en que se las puede desplazar por sí mismas sin variar la distancia entre sus puntos; con ello, cualquier segmento sobre el plano (o un arco sobre la esfera) se puede hacer coincidir con cualquier otro segmento igual (arco). Por eso, cualquier relación geométrica establecida en un lugar del plano o de la esfera debe cumplirse también en cualquier otro lugar. Por ejemplo, la distancia entre los extremos de dos segmentos perpendiculares de una longitud dada en el plano, trazados desde un punto A (fig. 3.15), no depende de la elección del punto A ni de la dirección de estos segmentos, porque a los triángulos que se obtienen siempre se les puede hacer coincidir uno con otro moviendo el plano por sí mismo. Una afirmación análoga también debe ser cierta para el espacio de velocidades. La velocidad relativa de dos sistemas que se mueven en cierto sistema de referencia A con velocidades dadas en direcciones perpendiculares, será la misma independientemente de cómo se mueve el sistema mismo A. O, en el lenguaje geométrico, la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el espacio de velocidades se determina completamente por sus catetos y no depende de la posición de este triángulo en el espacio. De manera semejante al plano o la esfera, el espacio de velocidades es «homogéneo», se le puede «desplazar» libremente por sí mismo, y cualquier segmento $\mathcal{V}$ dado siempre se puede hacer coincidir con cualquier otro segmento $\mathcal{V}'$ de la misma longitud.

Es útil analizar también una superficie «heterogénea», por ejemplo, el elipsoide (fig. 3.16). Evidentemente, éste

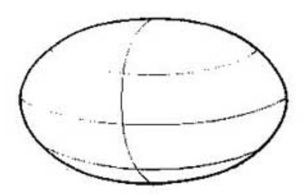


FIG. 3.16

ya no puede resbalar por sí mismo como la esfera o el plano. Y las propiedades de los triángulos en el «polo» del elipsoide serán diferentes de las propiedades de los triángulos en el «ecuador». Si hacemos un pedazo de lámina que tenga exactamente la forma del elipsoide en algún lugar, entonces no podremos moverlo de este lugar de tal manera que todo el tiempo esté pegado completamente a la superficie, pues en diferentes puntos el elipsoide está encorvado de diferente manera. Por el contrario, las superficies que permiten el movimiento por sí mismas deben tener la misma curvatura en todas partes. A ellas se les llama *superficies de curvatura constante*. Existen sólo tres tipos de estas superficies.

EL PRIMER TIPO son las *superficies de curvatura cero*. Así se llaman las superficies, a las cuales en cualquier lugar se les puede aplicar bien ajustado, sin arrugas y rupturas, un pedazo plano de lámina (o, digamos, de papel grueso), probablemente que doblándolo con anticipación. Además del plano, a este tipo también pertenecen, por ejemplo, los cilindros. Sin embargo, si esta superficie permite movimientos que hacen coincidir no solamente dos puntos, sino también dos segmentos iguales cualesquiera, o sea, desplazamientos y giros, entonces ella puede ser solamente un *plano euclidiano*. La suma de los ángulos de cualquier triángulo en una superficie de curvatura cero siempre es igual a π.

EL SEGUNDO TIPO son las llamadas *superficies de curvatura positiva constante*. El signo positivo de la curvatura significa que en el entorno de cualquiera de sus puntos esta superficie está constituida a semejanza de una gorra esférica. Si se intenta envolver esta superficie con una hoja de papel grueso, entonces invariablemente se formarán *pliegues*. En este caso la naturaleza resultó ser avara, cualquier superficie de curvatura positiva constante es una esfera. La suma de los ángulos de un triángulo en ella siempre es mayor que π (nosotros mostramos esto en el apartado 3.4).

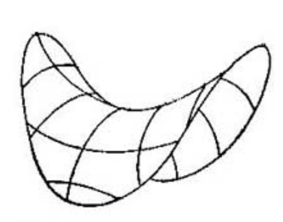


FIG. 3.17

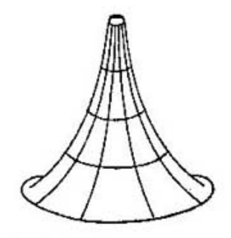


FIG. 3.18

Por último suele haber superficies del TERCER TIPO, en las cuales la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que π, estas son las *superficies de curvatura negativa constante.* Un pequeño sector de esta superficie recuerda una silla de montar (fig. 3.17). Para apretar compactamente contra ella una hoja de papel éste habrá que *romperlo forzosamente.* Al lector que tiene tendencia hacia el experimento se le puede proponer determinar con ayuda de un pedazo de papel las regiones de curvatura positiva, cero y negativa de la superficie de cualquier florero o jarra. Pero nosotros damos el ejemplo de una superficie de curvatura negativa (que no es constante) y de un triángulo sobre ella con la suma de sus ángulos igual a $5\pi/6$ en el problema 6. Está demostrado que en el espacio euclidiano, sobre cualquier superficie de curvatura negativa constante obligatoriamente hay puntos o líneas singulares, más adelante de los cuales no se puede continuar la superficie. Una de estas superficies con orilla está representada en la fig. 3.18. Es claro que no se puede moverla por sí misma con suficiente libertad, la línea de frontera debe quedarse en su lugar. Sin embargo, nadie prohíbe estudiar los espacios bidimensionales con curvatura negativa que permiten desplazamientos y giros *arbitrarios* en forma puramente teórica. Todos estos espacios están constituidos de la misma manera, la diferencia entre ellos es la misma que la que existe entre esferas de diferentes radios. Su geometría también es parecida a la geometría esférica (sobre todo las relaciones en los triángulos) y a la euclidiana. Además, los axiomas que describe esta geometría difieren de los axiomas euclidianos en un solo punto... Probablemente ustedes ya adivinaron que se está hablando del «axioma de las paralelas». En el espacio bidimensional con curvatu-

ra negativa constante se pueden trazar *muchas* rectas por un punto, las cuales no se intersecan con la recta dada, y no solamente una, como en el plano. Y la geometría de este espacio no es otra cosa que la *geometría de Lobachevski*.

Ya que en vigor al principio de relatividad el espacio de velocidades permite giros y desplazamientos arbitrarios, para su geometría se tienen solamente tres posibilidades: la geometría de Euclides, la geometría esférica y la geometría de Lobachevski. La primera variante tiene lugar en el caso no relativista. La segunda debe rechazarse puesto que la esfera es limitada: la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos no es mayor que la mitad de la longitud de la circunferencia mayor, y las distancias entre los puntos del espacio de velocidades pueden ser infinitamente grandes.

Hay otro argumento en contra de la esfera. Si nos movemos desde cierto punto por una «recta esférica» (circunferencia mayor) en una misma dirección, entonces a fin de cuentas regresaremos al punto inicial. En la cinemática a esto le correspondería un fenómeno bastante extraño: aumentando gradualmente la velocidad del objeto B con respecto al sistema de referencia A (y sin cambiar su dirección) ¡nosotros lograríamos que este objeto se detuviera! Y así, solamente nos queda suponer que

> *la geometría del espacio de velocidades relativista es la geometría de Lobachevski* [1].

Por desgracia no logramos mostrar al lector el «globo» del espacio de velocidades relativista. Pero aquí los culpables no somos nosotros, como ya se había dicho, esto es en principio imposible. Y no hay gran necesidad de ello, de la misma manera que no hay necesidad del «globo del espacio de rayos» para el estudio de su geometría. Es mucho más im-

[1] Es necesario reconocer que aquí nos apresuramos. Por ahora, de ninguna parte se deriva que la geometría del espacio de velocidades relativista no puede ser euclidiana. Pero más adelante (apartado 5.2) demostraremos que el carácter de la geometría determina unívocamente la dependencia entre la distancia $\mathcal{V}^c$ y la velocidad relativa, la función $r(v)$ en la fórmula (3.11). En particular, en el caso de la geometría euclidiana la distancia $\mathcal{V}^c$ debe ser proporcional a la velocidad, y esto contradice la segunda parte del principio de relatividad, o sea, la limitación de la velocidad de propagación de las interacciones, ya que las distancias $\mathcal{V}^c$ pueden ser infinitamente grandes.

portante y útil el hecho de que tenemos las proyecciones planas del espacio, los mapas $\mathscr{V}$ de velocidades. Y nos convenceremos de esto muy pronto en el siguiente capítulo.

PROBLEMAS Y COMPLEMENTOS

1. Imposibilidad del desarrollo de la esfera. Se llama *desarrollo de una superficie* a su aplicación sobre el plano tal que la longitud de cualquier curva sobre la superficie es igual a la longitud de su imagen en el plano.

Supongamos que cierto trozo de la esfera se puede desarrollar sobre el plano. Demuéstrese que entonces cualquier circunferencia esférica ω sobre este sector está obligada a pasar a ser una circunferencia ω' sobre el plano, además, la longitud de la circunferencia ω' será *mayor* que la longitud de la circunferencia ω. Por consiguiente, el desarrollo de la esfera es imposible (teorema de Euler).

2. Proyecciones cartográficas. No existe un mapa plano «ideal» de la esfera, en el cual las distancias se transmitan sin deformaciones (véase el problema 1). Sin embargo, existen proyecciones que poseen otras propiedades más o menos buenas. Una de ellas, la proyección «gnomónica», es la proyección central de la esfera sobre el plano desde su centro. En esta proyección las rectas esféricas pasan a ser rectas del plano. Otras dos proyecciones «buenas» se ven a continuación.

1) *Proyección de áreas iguales.* Circunscribamos alrededor de la esfera un cilindro. Desde cada punto P de la esfera tracemos una perpendicular al eje del cilindro y prolonguémosla después del punto P hasta la intersección con la superficie del cilindro en el punto P'. Después cortemos el cilindro por la generatriz y desarrollémoslo en un rectángulo. A cada punto P de la esfera le corresponde exactamente un punto P' del rectángulo (la excepción son dos puntos de la esfera, ¿cuáles?). ¿Cómo se representarán en el rectángulo los paralelos y los meridianos, si se considera que el cilindro toca la esfera en el ecuador? Demuéstrese que el área de cualquier región sobre la esfera es igual al área de la región correspondiente en el rectángulo (esto explica el nombre de la proyección).

2) *Proyección isogonal.* Supongamos que N y S son puntos diametralmente opuestos de la esfera. Proyectemos la esfera desde el punto N sobre un plano que la toca en el punto S (*proyección estereográfica*). Demuéstrese, que, primeramente, el ángulo entre dos curvas cualesquiera de la esfera es igual al ángulo entre sus imágenes en el plano y, en segundo lugar, que cualquier circunferencia en la esfera pasa a ser una circunferencia o una recta en el plano.

3. Comparación de las geometrías euclidiana y esférica. Más abajo se da una serie de teoremas de la planimetría elemental bien conocidos. Intente entender qué sentido toman si se les lee como afirmaciones de la geometría esférica o de la geometría del espacio de rayos. Aclare si con esta «traducción» se conservan verdaderos. Si resulta que sí, entonces demuéstrelos, si no, encuéntreles una opción apropiada.

1) Por un punto se puede trazar una recta perpendicular a la recta dada.

2) El conjunto de puntos equidistantes de los puntos dados A y B es la perpendicular media al segmento AB.

3) La suma de dos lados de un triángulo es mayor que su tercer lado.

4) Un ángulo externo de un triángulo

a) es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él;

b) es mayor que cualquiera de estos dos ángulos.

5) Un triángulo es isósceles cuando y sólo cuando

a) los ángulos adyacentes a uno de sus lados son iguales;

b) una de sus medianas coincide con su altura;

c) una de sus medianas coincide con la bisectriz.

6) La mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los lados que tienen un vértice común con ella.

7) Las bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto. Lo mismo ocurre con las medianas, las alturas y las perpendiculares medias a sus lados

8) Dos triángulos que tienen ángulos iguales son semejantes.

4. Trigonometría esférica.

1) Nosotros hemos demostrado las relaciones (3.6)...(3.9) para el «triángulo» ABC del espacio de rayos, el cual cabe enteramente en el mapa K_A. Demuéstrese que estas relaciones son ciertas para los «triángulos» arbitrarios.

2) Sean a, b y c las longitudes de los lados BC, CA y AB de un triángulo esférico arbitrario ABC en una esfera de radio 1 y α, β, y γ las magnitudes de sus ángulos. Demuéstrese las siguientes relaciones entre ellos:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \alpha}=\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta}=\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \gamma} \text{ (el teorema de los senos);}$$

$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos \gamma$ (el primer teorema de los cosenos);
$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \cos c$ (el segundo teorema de los cosenos).

3) Hallar la distancia de Moscú a Jabárovsk, conociendo el radio de la Tierra $R = 6400$ km y las coordenadas geográficas de Moscú, 56° de latitud boreal, 38° de longitud oriental, y de Jabárovsk, 48° de latitud boreal, 135° de longitud oriental.

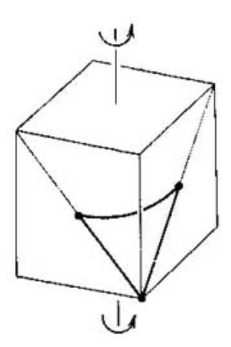


FIG. 3.19

5. **Area de los polígonos esféricos.** Demuéstrese que el área de un polígono de n lados $A_1A_2...A_n$ es igual a $(\hat{A}_1+\hat{A}_2+...+\hat{A}_n-(n-2)\pi)R^2$, donde R es el radio de la esfera y $\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_n$ son las magnitudes de los ángulos del polígono de n lados. (*Indicación:* hállese primero el área de una lúnula, de una parte recortada en la esfera por dos meridianos).

6. **Superficie de curvatura negativa.** Vamos a girar un cubo alrededor del eje que pasa por los centros de sus bases (fig. 3.19). Demuéstrese que con esto cada una de las diagonales de las caras laterales del cubo describe una misma superficie de revolución (el así llamado hiperboloide de una hoja), cuya sección axial es una hipérbola. Encuentre la suma de los ángulos del triángulo curvilíneo en esta superficie, dos vértices del cual coinciden con los centros de las dos caras adyacentes del cubo, y la tercera, con el vértice del cubo que pertenece a estas dos caras. (*Resultado:* $5\pi/6$).

Capítulo 4
GEOMETRÍA DEL ESPACIO DE VELOCIDADES RELATIVISTA

4.1. LOS MAPAS DE VELOCIDADES RELATIVISTAS

En el capítulo anterior nosotros ya formulamos nuestra tarea principal: el estudio de la geometría del espacio de velocidades relativista con ayuda de sus mapas, construidos por diferentes observadores inerciales. Cada uno de estos mapas K_A es un círculo, cuyo centro, el punto A, representa la velocidad del mismo observador inercial A. El vector $\overrightarrow{AX}$, trazado desde el centro A a un punto arbitrario X del círculo, determina la magnitud y la dirección de la velocidad del sistema de referencia X con respecto al observador A, en una cierta escala $v_{X|A} = \overrightarrow{AX}$. A los objetos que se mueven con la velocidad máxima posible, la velocidad de la luz c, en el mapa K_A les corresponden los puntos situados en la circunferencia Ω_A de radio c, la cual acota el círculo K_A. A esta circunferencia la llamaremos *absoluto del mapa* K_A. Es muy cómodo elegir un sistema de unidades de medición, en el cual el valor numérico de la velocidad de la luz sea igual a la unidad. Por ejemplo, en calidad de patrón de longitud se podría tomar la distancia que recorre la luz en un segundo (en la astronomía se utiliza una magnitud análoga, el año de luz). Entonces las velocidades se van a medir con una unidad natural, la velocidad de la luz, que es igual para cualquier observador inercial. En estas unidades la velocidad de cualquier cuerpo se calcula por la fórmula

$$v = \frac{v_{\text{común}}}{c}.$$

De aquí en adelante vamos a usar precisamente este sistema de unidades, por eso, el radio de cualquier mapa $\mathcal{V}$ va a ser igual a la unidad.

Aclaremos como se representan en los mapas $\mathcal{V}$ las rectas

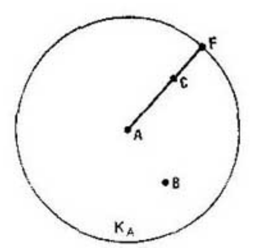


FIG. 4.1

del espacio de velocidades relativista. Por definición, tres puntos A, C, y F del espacio de velocidades se encuentran en una recta $\mathcal{F}$, si los vectores de las velocidades $v_{C|A}$ y $v_{F|A}$ son colineales. En el mapa $\mathcal{F}$ del observador A estos puntos se representan con el centro A del círculo K_A y los puntos C y F que se encuentran en un diámetro (fig. 4.1). En otras palabras, cualquier recta $\mathcal{F}$ que pasa por el punto-$\mathcal{F}$ A se representa con un diámetro del círculo K_A. Resulta que también *en cualquier otro mapa-$\mathcal{F}$ K_B ¡las imágenes de estos puntos se encuentran en una recta euclidiana* ! Es necesario que nos detengamos más detalladamente en esta situación de gran importancia para lo siguiente.

Y así, supongamos que los puntos-$\mathcal{F}$ A, C, y F se encuentran en una recta del espacio de velocidades. Para mayor precisión, supongamos que los vectores colineales $v_{C|A}$ y $v_{F|A}$ tienen la misma dirección y que F es un punto del absoluto del espacio $\mathcal{F}$. (Es fácil adaptar todo el razonamiento que sigue a tres puntos cualesquiera que se encuentran en una recta $\mathcal{F}$). En la fig. 4.1 se muestra como se representa esta situación en el mapa K_A. Físicamente ella se puede realizar en el siguiente experimento imaginario: imaginémonos que los observadores inerciales A y C (en el espacio de velocidades a ellos les corresponden los puntos-$\mathcal{F}$ A y C) vuelan en dos naves cósmicas y que en cierto momento se encuentran[1]. Pasado un cierto tiempo después del encuentro el cosmonauta A emite un impulso de laser corto y dirigido F, al cual le corresponde el punto-$\mathcal{F}$ F. La dirección de la velocidad $A_{F|A}$ de los fotones del impulso coincide con la dirección de

[1] La suposición sobre el encuentro de ninguna manera limita la generalidad, ya que para nosotros son importantes solamente las velocidades relativas de los observadores.

movimiento del cohete C con respecto a A, por eso, además. después de cierto tiempo este impulso alcanza al cosmonauta C. Ahora veamos como se ve esto desde el punto de vista de un tercer observador inercial, el cosmonauta B. Supongamos que en el momento del encuentro de las naves A y C el cosmonauta B pasa volando junto a ellas, tres cosmonautas se estrechan las manos en el vuelo y en ese momento B conecta su cronómetro. En el sistema de referencia relacionado con el observador B las naves A y C, en correspondencia con el principio de relatividad, se mueven uniformemente por las rectas que pasan a través del punto B_0, que es el lugar del encuentro de los cosmonautas en nuestro espacio tridimensional real, y la nave B, evidentemente, se encuentra en reposo en este punto. Si denotamos las posiciones de las naves, A, B y C en el momento t en este sistema de referencia como A_t, $B_t \equiv B_0$ y C_t, entonces los vectores de los desplazamientos de las naves en el tiempo t se pueden expresar a través de las velocidades de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{A_0A_t} = \overrightarrow{B_0A_t} = v_{A|B}t, \quad \overrightarrow{C_0C_t} = \overrightarrow{B_0C_t} = v_{C|B}t,$$

$$\overrightarrow{B_0B_t} = v_{B|B}t = 0.$$

Supongamos que el impulso de luz F fue emitido en el momento t_1 (de acuerdo al reloj del cosmonauta B) y alcanzó a la nave C en el momento t_2; entonces el vector de su desplazamiento en el sistema B durante el tiempo de t_1 a t_2 es igual a $\overrightarrow{A_{t_1}C_{t_2}} = \overrightarrow{B_0C_{t_2}} - \overrightarrow{B_0A_{t_1}} = v_{C|B}t_2 - v_{A|B}t_1$. Pero por otro lado, el impulso F se propaga con respecto a B uniformemente y en línea recta con una velocidad $v_{F|B}$, por eso, el mismo vector de su desplazamiento $\overrightarrow{A_{t_1}C_{t_2}} = v_{F|B}(t_2 - t_1)$. Por lo tanto

$$v_{F|B}(t_2 - t_1) = v_{C|B}t_2 - v_{A|B}t_1$$

o bien

$$(v_{A|B} - v_{F|B})\, t_1 = (v_{C|B} - v_{F|B})\, t_2.$$

Ahora veamos el mapa K_B (fg. 4.2). Su centro B_1 representa el punto-$\mathscr{T}B$, y los puntos A_1, C_1, F_1, los puntos-$\mathscr{T}A$, C y F, además, $\overrightarrow{B_1A_1} = v_{A|B}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = v_{C|B}$,

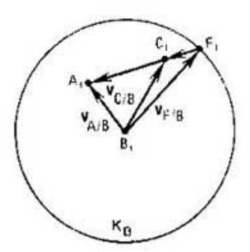


FIG. 4.2

$\overrightarrow{B_1F_1} = v_{F_1 B}$. Escribamos las diferencias de los vectores de las velocidades:

$$v_{A|B} - v_{F|B} = \overrightarrow{B_1A_1} - \overrightarrow{B_1F_1} = \overrightarrow{F_1A_1},$$

$$v_{C|B} - v_{F|B} = \overrightarrow{B_1C_1} - \overrightarrow{B_1F_1} = \overrightarrow{F_1C_1}$$

y sustituyamos estas expresiones en la relación obtenida más arriba: $\overrightarrow{F_1A_1} \cdot t_1 = \overrightarrow{F_1C_1} \cdot t_2$. Vemos que los vectores $\overrightarrow{F_1A_1}$ y $\overrightarrow{F_1C_1}$ son colineales y esto significa que los puntos A_1, C_1 y F_1 del mapa K_B se encuentran en una recta, la cual puede ser trazada a través de los puntos A_1, C_1, F_1 ¡con ayuda de una regla ordinaria!

Hagamos conclusiones. Nosotros hemos demostrado que

> *tres puntos cualesquiera del espacio de velocidades que se encuentran en una recta $\mathcal{V}$ se representan en cualquier mapa $\mathcal{V}$ como tres puntos que se encuentran en una sola recta euclidiana*

(en el caso relativista, en la cuerda de un círculo).

Esta demostración, en esencia, se apoyó solamente en la primera parte del principio de relatividad: un movimiento uniforme y rectilíneo se conserva uniforme y rectilíneo para cualquier observador inercial. En lugar del impulso de luz el cosmonauta A pudo haber mandado cualquier «cuerpo de prueba» F, por eso, nuestro razonamiento es igualmente cierto tanto para el caso relativista, como para el no relativista.

Haciendo uso de esta propiedad fundamental que hemos demostrado para los mapas $\mathcal{V}$, nosotros en el siguiente apar-

tado describiremos la transformación que permite por el mapa de un observador construir el mapa de cualquier otro observador: aprenderemos a «hacer coincidir» diferentes mapas $\mathscr{V}$.

4.2. TRANSFORMACIÓN DE LOS MAPAS DEL ESPACIO DE VELOCIDADES RELATIVISTA

El mapa K_A del espacio de velocidades relativista, construido por el observador inercial A, contiene toda la información sobre las velocidades de diferentes objetos con respecto a este observador, pero por lo pronto no dice nada sobre los resultados de las mediciones de las velocidades efectuadas por otros observadores inerciales. Para obligarlo a hablar, investigaremos la transformación L_{AB} que traduce el mapa K_A en el mapa K_B construido por otro observador inercial B que se mueve con respecto a A.

Supongamos que a un punto arbitrario P del espacio de velocidades le corresponde en el mapa K_A el punto P, y en el mapa K_B, el punto P_1 (fig. 4.3). Entonces, por definición, la transformación L_{AB} convierte el punto P en el punto P_1, por ejemplo, el centro A del círculo K_A con esta transformación pasa a ser un cierto punto A_1 del círculo K_B, que ahora ya no coincide con su centro B_1. ¿Qué se puede decir inmediatamente sobre esta transformación? Ante todo, esta transformación aplica el círculo K_A sobre el círculo K_B, además,

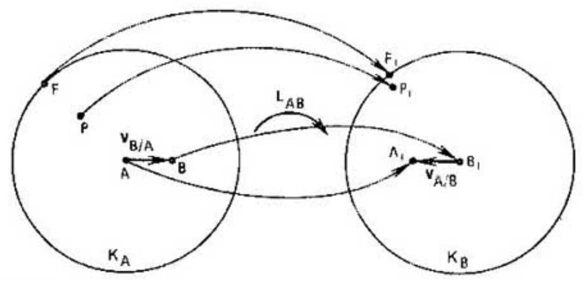


FIG. 4.3

el absoluto del primer círculo (la circunferencia Ω_A), evidentemente, se aplica sobre el absoluto Ω_B del círculo K_B. Cualquier cuerda FG del círculo K_A sirve, como ya lo demostramos en el apartado anterior, de imagen de cierta recta-$\mathcal{F}FG$. En el mapa K_B esta recta $\mathcal{F}$ también se representa con una cuerda. Por consiguiente, *la cuerda arbitraria FG del círculo K_A con la transformación L_{AB} pasa a ser la cuerda F_1C_1 del círculo K_B*. Nosotros ya nos encontramos con las aplicaciones que transforman rectas en rectas, cuando examinamos los mapas de la esfera y del espacio de rayos. Recordemos que estas transformaciones se llaman transformaciones proyectivas, por eso, en forma concisa podemos decir que

> *la transformación L_{AB} es una aplicación proyectiva del círculo K_A en el círculo K_B.*

Pero esto es poco, ya que nosotros necesitamos una descripción concreta y exacta de la transformación de mapas. Marcaremos en los mapas K_A y K_B las posiciones de los puntos -$\mathcal{F}$ A y B: los puntos A y B_1 caerán, correspondientemente, en los centros de los círculos K_A y K_B, y los puntos B (en el mapa K_A) y A_1 (en el mapa K_B) van a estar separados de los centros de los círculos a las distancias $|AB| = v_{B|A}$ y $|A_1B_1| = v_{A|B} = v_{B|A} = |AB|$ (fig. 4.3) Resulta (véanse los problemas y los complementos al final del capítulo) que la aplicación proyectiva de un círculo sobre otro es dada casi de una manera unívoca por las imágenes de dos puntos. Aclararemos esto para el caso no relativista, cuando la transformación del mapa K_A en el mapa K_B se reduce simplemente a la superposición de un mapa sobre otro. Si se fijan en el plano de un mapa los puntos A y B, y en el plano del otro, los puntos A_1 y B_1 de tal manera que $|A_1B_1| = |AB|$, entonces, evidentemente, se tienen exactamente dos métodos para sobreponer un plano sobre el otro de tal manera que el punto A coincida con A_1, y el B, con B_1, los cuales dependen del lado por el que un plano se «junta» con el otro. Por lo mismo, existen exactamente dos aplicaciones proyectivas del círculo K_A sobre el círculo K_B, en las cuales los puntos A y B pasan a ser, correspondientemente, los puntos A_1 y B_1. Por eso, si nosotros podemos presentar estas dos aplicaciones, entonces se puede no dudar de que la transformación L_{AB} coincide con uno de ellos. No es difícil determinar con cuál precisamente.

De nuevo recordemos los mapas proyectivos de la esfera (o del espacio de rayos). La transformación de uno de ellos en otro se reducía a la proyección central. Intentaremos adaptar esta proyección también a la transformación de los mapas $\mathcal{J}'$ relativistas. Haremos notar, sin embargo, que la proyección central de un círculo, como regla, no es un círculo. Se puede uno convencer de esto directamente, si nos fijamos en la forma de la mancha que da una lámpara de sobremesa con una pantalla redonda sobre la superficie de la mesa. La frontera entre la luz y la sombra generalmente es una de las llamadas secciones cónicas: elipse, hipérbola o parábola. Pero se puede voltear la pantalla de tal manera que la mancha sea un círculo perfecto. Nosotros también intentaremos colocar los círculos K_A y K_B en el centro de la proyección de tal manera que un círculo se proyecte sobre el otro, y que además su centro pase a un punto dado que *no coincide* con el centro del segundo círculo.

Denotaremos con α el plano del círculo K_A. Por sus puntos A y B trazamos el diámetro FG (fig. 4.4). Del punto F, uno de los extremos de este diámetro, trazamos una perpendicular al plano α, elegimos en él un punto arbitrario O (el futuro centro de la proyección) y lo unimos por medio de una recta con el segundo extremo del diámetro G. En la continuación del segmento GO marcamos el punto G_1 a la distancia $|OG_1| = |OF|$ del punto O y por el punto G_1 hacemos pasar el plano β, perpendicular a la recta G_1G. Final-

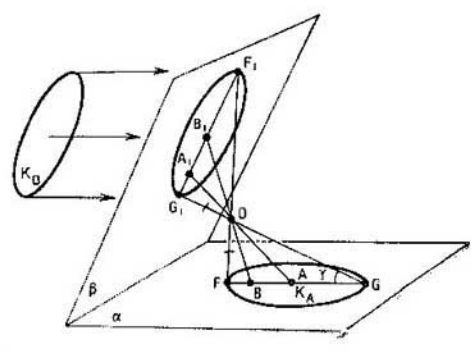


FIG. 4.4

mente, veamos la proyección del plano α sobre el plano β desde el centro O. La simetría de nuestra construcción permite confiar en que con esta proyección el círculo K_A va a pasar al círculo K del mismo radio. Si se pone el círculo K_B en el plano β en lugar del círculo K, entonces obtendremos la aplicación proyectiva del círculo K_A en el círculo K_B. En la fig. 4.4 se ve que el centro A del círculo K_A se proyecta en un punto diferente del centro K_B. Y haciendo uso de la libertad en la elección del centro de la proyección O en la perpendicular FO, se puede intentar escoger una posición tal que este punto coincida con el punto dado A_1 del círculo K_B, o sea, que la distancia de este punto al centro B_1 sea igual a la velocidad relativa $v_{A|B} = v_{B|A}$ de los observadores A y B.

Haremos una fundamentación rigurosa de este razonamiento en dos etapas. Primero demostraremos que la proyección central de la circunferencia Ω_A sobre el plano β es realmente una circunferencia, y de aquí, evidentemente, se deriva que la proyección del círculo K_A es también un círculo. En la segunda etapa se escogerá la posición correcta del centro de la proyección O.

1ª etapa. Supongamos que P, un punto arbitrario de la circunferencia Ω_A que limita K_A y P_1, es la proyección de ésta en el plano β desde el centro O. Demostremos que el ángulo $F_1P_1G_1$ (donde F_1 es la proyección de F en el plano β; véase la fig. 4.5) es recto, o sea, que el punto P_1 se encuentra en la circunferencia con diámetro G_1F_1. Este ángulo se ob-

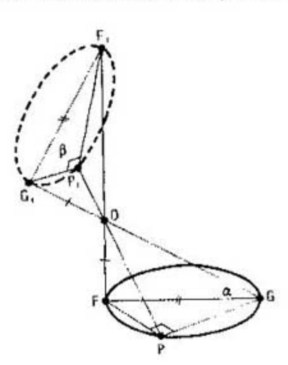


FIG. 4.5

tiene en la intersección del ángulo diedro formado por los planos OP_1F_1 y OP_1G_1 y el plano β, perpendicular a su cara OP_1G_1 (por la construcción misma $\beta \perp OG_1$). Por eso, es suficiente demostrar que los planos OP_1F_1 y OP_1G_1 o, lo que es lo mismo, que OPF y OPG son perpendiculares. Para la demostración, haremos notar que la recta PG es perpendicular a dos rectas del plano OPF: a la recta OF, porque $OF \perp \alpha$ ($=FPG$) y a la recta FP, porque el ángulo FPG está inscrito en la circunferencia Ω_A y se apoya en su diámetro FG. Por consiguiente, la recta PG es perpendicular al plano OFP, y esto significa que el plano OPG, que contiene esta recta, es perpendicular a OFP.

Y así, en la proyección con centro O la circunferencia Ω_A pasa a la circunferencia Ω con diámetro F_1G_1 en el plano β, además, evidentemente, $|F_1G_1| = |FG|$. Ahora podemos poner el círculo K_B (cuyo diámetro también es igual a $|FG|$) en el plano β de tal manera que su circunferencia Ω_B coincida con la circunferencia Ω, y el punto A_1 caiga en el segmento F_1G_1. Entonces, como se deriva de nuestro razonamiento, en la proyección con el centro O la circunferencia Ω_A pasará a Ω_B y los puntos internos del círculo K_A, a los puntos internos del círculo K_B, en particular su centro A se proyectará en un punto del diámetro F_1G_1.

2ª etapa. Ahora tenemos que preocuparnos de que la proyeccion del punto A coincida con el punto dado A_1. Está claro que al variar la distancia FO o el ángulo $\gamma = \widehat{FGO}$, nosotros vamos a variar la posición de la proyección del punto A en el diámetro F_1G_1. Lo más cómodo es dar la posición del punto en el segmento con ayuda de la relación, en la cual aquél divide el segmento. Veamos como se transforma esta relación en la proyección central en el caso general.

Teorema de la transformación de las relaciones de la proyección central. *Supongamos que en la proyección central con centro O cierto segmento FG pasa a un segmento F_1G_1 y sea que P_1 es la proyección de un punto arbitrario P del segmento FG* (fig. 4.6). *Entonces, la relación n_1 (P_1), en la cual el punto P_1 divide el segmento F_1G_1 se obtiene de la relación n (P), en la cual el punto P divide el segmento FG, por medio de la multiplicación por el coeficiente λ igual a*

$$\lambda = \frac{|OF_1| \cdot |OG|}{|OG_1| \cdot |OF|}.$$

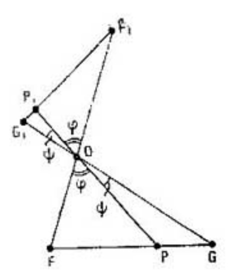


FIG. 4.6

(λ no depende de la posición del punto P en el segmento FG.)

Para la demostración hagamos notar (véase la fig. 4.6) que la relación $n(P) = |FP| : |PG|$ es igual a la relación de las áreas de los triángulos OFP y OPG, ya que sus alturas trazadas desde el vértice O coinciden. Expresando estas áreas a través de los lados que salen del vértice O y de los ángulos $\varphi = \widehat{FOP}$ y $\psi = \widehat{POG}$ entre ellos: $S_{OFP} = \frac{1}{2}\,|OF|\cdot|OP|\,\operatorname{sen}\varphi$, $S_{OPG} = \frac{1}{2}\,|OP|\cdot|OG|\,\operatorname{sen}\psi$, obtendremos

$$n(P) = \frac{S_{OFP}}{S_{OPG}} = \frac{|OF|\,\operatorname{sen}\varphi}{|OG|\,\operatorname{sen}\psi}.$$

Exactamente de la misma manera

$$n_1(P_1) = |F_1P_1| : |P_1G_1| = \frac{S_{OF_1P_1}}{S_{OP_1G_1}} = \frac{|OF_1|\,\operatorname{sen}\varphi}{|OG_1|\,\operatorname{sen}\psi}.$$

Tomando la relación de estas dos relaciones, nos convencemos de que aquélla no depende de los ángulos φ y ψ y, por lo tanto, de la elección del punto P:

$$n_1(P_1) : n(P) = \frac{|OF_1|\cdot|OG|}{|OG_1|\cdot|OF|} = \lambda. \tag{4.1}$$

Este teorema que hemos demostrado va a jugar un papel muy importante en lo sucesivo; ahora mismo lo aplicaremos a un caso particular. Sea FG el diámetro del círculo K_A (fig. 4.4), F_1G_1, su proyección en el plano β desde el centro O y el punto $P = A$, el centro del segmento FG, o sea, el centro del círculo K_A. Entonces $n(A) = 1$ y, de acuerdo a (4.1), $n_1(A_1) = (|OF_1| : |OG_1|)\cdot(|OG| : |OF|)$, don-

de A_1 es la proyección del punto A. Pero $|OF| : |OG| = \operatorname{sen} \widehat{FGO}$, y $|OG_1| : |OF_1| = \operatorname{sen} \widehat{G_1F_1O}$, además, evidentemente, $\widehat{G_1F_1O} = \widehat{FGO} = \gamma$, por eso, $n_1(A_1) = 1/\operatorname{sen}^2\gamma$. Por otro lado, tomando en cuenta que el radio del círculo K_B es igual a la unidad y la distancia del punto A_1 a su centro $|A_1B_1| = v_{A|B}$, hallamos que $|F_1A_1| = 1 + v_{A|B}$, $|A_1G_1| = 1 - v_{A|B}$, y, por consiguiente, $n_1(A_1) = |F_1A_1| : |A_1G_1| = (1 + v_{A|B}) : (1 - v_{A|B})$. Igualando las dos expresiones para la relación $n_1(A_1)$, obtenemos la siguiente regla de elección del centro de la proyección O: el ángulo $\widehat{FGO} = \gamma$ se determina de la condición

$$\operatorname{sen} \gamma = \sqrt{\frac{1 - v_{A|B}}{1 + v_{A|B}}}.$$

Con esta elección del ángulo γ el punto A se proyecta en el punto A_1. Pero entonces el punto B automáticamente con la proyección cae en el centro del círculo K_B, ya que $|AB| = |A_1B_1|$.

De esta manera hemos terminado la construcción de la aplicación proyectiva del círculo K_A sobre el círculo K_B, el cual transforma los puntos A y B del primer círculo en los puntos A_1 y B_1 del segundo. Incluso se pueden presentar dos aplicaciones de este tipo: es que la «hoja de papel» con el mapa K_B se puede sobreponer sobre el círculo K del plano β por uno y otro lado. Nosotros ya hemos dicho que en total existen dos aplicaciones de este tipo (una demostración bastante elemental, aunque no muy sencilla, de este teorema se da en el apartado «Problemas y complementos» al final del capítulo), por eso, la transformación L_{AB} debe coincidir con una de estas aplicaciones. En cualquier caso, *la transformación de los mapas del espacio de velocidades relativista se puede reducir a la proyección central* [1]).

Queda una última pregunta: ¿cuál de estas dos variantes es la «correcta», la que corresponde a la transformación L_{AB}? Para encontrar la respuesta es suficiente analizar la transformación de cualquier punto que no se encuentra en el diá-

[1]) Notemos que examinando la misma proyección central como aplicación del círculo K_B sobre K_A, obtendremos la transformación inversa L_{BA} del mapa K_B en el mapa K_A.

metro FG. En la fig. 4.4 los puntos del semicírculo «más cercano» a nosotros del mapa K_A se proyectan en los puntos del semicírculo «más alejado» del mapa K_B. Comparando esta figura con la fig. 4.3, es fácil comprender que es necesario poner el mapa K_B sobre el plano β «de cara» hacia arriba, hacia el lado opuesto al centro de la proyección O.

4.3. LA FÓRMULA RELATIVISTA DE LA COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

La transformación L_{AB} permite pasar del mapa de velocidades medidas por un observador relativista al mapa de cualquier otro observador. Ahora ya tenemos todo listo para obtener el primer resultado físico realmente interesante: la ley relativista de la composición de velocidades. Veamos el caso cuando dos observadores, A y C, se mueven a lo largo de una misma recta con respecto al observador B. Sea $v_{A|B} = u$ la velocidad de A con respecto a B y $v_{C|A} = v$ la velocidad de C con respecto a A. Nosotros debemos responder a la pregunta: ¿a qué es igual la velocidad w del observador C con respecto al sistema de referencia B? En la mecánica clásica nosotros conocemos la respuesta: $v_{C|B} = v_{C|A} + v_{A|B}$ ó $w = u + v$, o sea las velocidades simplemente se suman. Nos es necesario encontrar el análogo de esta fórmula en el caso relativista, cuando las velocidades u, v y w son ya comparables con la velocidad de la luz. Pasaremos del mapa K_A al mapa K_B con ayuda de la transformación L_{AB}. En este caso no hay necesidad de dibujar los círculos mismos K_A y K_B: en el mapa K_A las velocidades de los sistemas A, B y C están colocadas en el diámetro FG, por eso, es suficiente representar solamente este diámetro y su imagen F_1G_1 en la proyección central con respecto al punto O (fig. 4.7). En este dibujo $|AB| = u$, $|AC| = v$, $|B_1C_1| = w$. Denotaremos con $n(B)$ y $n(C)$ las relaciones, en las cuales los puntos B y C dividen el diámetro FC en el mapa K_A. De una manera análoga determinaremos $n_1(B_1)$ y $n_1(C_1)$ en el mapa K_B. Los círculos K_A y K_B tienen radio unitario, por eso,

$$n_1(B_1) = \frac{|F_1B_1|}{|G_1B_1|} = 1; \quad n_1(C_1) = \frac{|F_1C_1|}{|G_1C_1|} = \frac{1+w}{1-w};$$

$$n(B) = \frac{1-u}{1+u}; \quad n(C) = \frac{1+v}{1-v}.$$

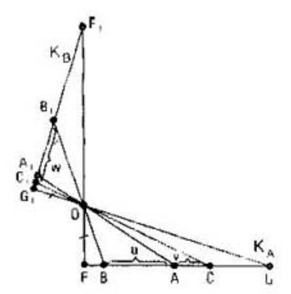


FIG. 4.7

Ya que la transformación $L_{A\,B}$ es una proyección central, para ella es cierto el teorema de la transformación de las relaciones demostrado en el apartado anterior. La relación n_1, en la cual cualquier punto divide el diámetro F_1G_1 puede ser obtenida de la relación n en el mapa Λ_A por medio de la multiplicación por un coeficiente constante λ $(n_1 = \lambda n)$ que no depende del punto, por eso,

$$n_1(C_1) = \frac{n_1(C_1)}{n_1(B_1)} = \frac{\lambda n(C)}{\lambda n(B)} = \frac{n(C)}{n(B)} \tag{4.2}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{1+w}{1-w} = \frac{1+u}{1-u}\cdot\frac{1+v}{1-v}. \tag{4.3}$$

Transformemos el segundo miembro de esta igualdad

$$\frac{1+w}{1-w} = \frac{(1+u)(1+v)}{(1-u)(1-v)} = \frac{(1+uv)+(u+v)}{(1+uv)-(u+v)} = \frac{1+\dfrac{u+v}{1+uv}}{1-\dfrac{u+v}{1+uv}}. \tag{4.4}$$

Comparando el primero y segundo miembros de la última relación, llegamos a la conclusión de que

$$w = \frac{u+v}{1+uv} \quad \text{ó} \quad v_{C|B} = \frac{v_{C|A}+v_{A|B}}{1+v_{C|A}v_{A|B}}. \tag{4.5}$$

Esta es la fórmula de la «composición» de las velocidades relativistas para el caso del movimiento a lo largo de una recta. Claro, se le puede llamar «fórmula de la composición de

velocidades» sólo condicionalmente, ya que de acuerdo con ella es necesario no solamente sumar las velocidades u y v, como se hacía en el caso no relativista, sino que se tiene que dividir el resultado por el denominador $1+uv$. Este denominador es poco importante cuando las velocidades u y v son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz (u, $v \ll 1$); entonces en él puede despreciarse el producto uv en comparación con la unidad. En este caso obtenemos la fórmula no relativista acostumbrada $w = u + v$. Pero si u y v no son pequeñas, entonces el denominador empieza a jugar un papel determinante, garantizando el cumplimiento del principio de relatividad. Por ejemplo, el resultado w de la composición de dos velocidades u y v no puede ser mayor que la velocidad de la luz, o sea, que la unidad. En efecto, $(1+uv)-(u+v) = (1-u)(1-v) > 0$, si u, $v < 1$, por eso, el denominador $1+uv$ es mayor que el numerador y w siempre será menor que la unidad. Si una de las velocidades, por ejemplo v, es igual a la velocidad de la luz para el observador A, o sea, $v = 1$, entonces para el otro observador inercial B ésta también será igual a la unidad:

$$w = \frac{u+v}{1+uv} = \frac{u+1}{1+u\cdot 1} = 1;$$

es natural que la fórmula relativista de la composición de velocidades concuerda con el principio de la constancia de la velocidad de la luz en cualquier sistema inercial de referencia.

4.4. DETERMINACIÓN DE LA DISTANCIA EN EL ESPACIO DE VELOCIDADES

Por fin podemos poner la última piedra en el fundamento de la geometría del espacio de velocidades relativista, podemos aclarar como la distancia-$\mathcal{T}$ $\|PQ\|$ se expresa por medio de la velocidad relativa $v_{P|Q}$. Nosotros ya escribimos la forma general de esta dependencia en el párrafo 3.5:

$$\|PQ\| = r(v_{P|Q}). \qquad (4.6)$$

Entonces nosotros entendimos en base a qué razonamientos es necesario elegir la función $r(v)$: esta función debe transformar la ley de la «composición» de velocidades en la ley

FIG. 4.8



de la adición de las distancias $\mathcal{T}$. Y he aquí que, cuando ya nos es conocida la forma concreta de la ley de la «composición» de las velocidades (fórmula (4.5)), podemos escribir la *ecuación* para la función r. Supongamos que los puntos A, B y C se encuentran en una recta y A, entre B y C (fig. 4.8); entonces $\| BC \| = \| BA \| + \| AC \|$, o sea, de acuerdo a (4.6)

$$r(v_{B|C}) = r(v_{B|A}) + r(v_{A|C}). \tag{4.7}$$

Pero de acuerdo a la fórmula relativista (4.5) de la composición de velocidades $v_{B|C} = w = \frac{u+v}{1+uv}$, donde $u = v_{B|A}$ y $v = v_{A|C}$, por eso, la función que necesitamos r debe satisfacer la relación

$$r\left(\frac{u+v}{1+uv}\right) = r(u) + r(v).$$

Esta ecuación para la determinación de $r(v)$ se ve un poco terrible, pero ya tenemos una fórmula lista que simplifica considerablemente el problema, la fórmula (4.3). Las velocidades u, v y w entran en ella de la misma manera; para cada una de ellas se calcula la función $y = \frac{1+x}{1-x}$. Introduzcamos una nueva magnitud, determinada para dos puntos cualesquiera P y Q del espacio de velocidades:

$$\{PQ\} = \frac{1+v_{P|Q}}{1-v_{P|Q}}; \tag{4.8}$$

entonces la igualdad (4.3) se reescribe de una manera particularmente sencilla:

$$\{BC\} = \{BA\} \cdot \{AC\}. \tag{4.9}$$

Por eso, tiene sentido buscar la expresión para la distancia $\mathcal{T}$ entre los puntos P y Q en la forma de cierta función de $\{PQ\}$:

$$\| PQ \| = f(\{PQ\}).$$

Designemos $\{BA\}$ por x y $\{AC\}$ por y; entonces de (4.9) obtenemos que $\{BC\} = xy$, y la regla $\| BC \| = \| BA \| + \| AC \|$ de la adición de distancias en un segmento se reescribe de la siguiente forma:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{4.10}$$

Esta ecuación es ya totalmente conocida, su solución se adivina inmediatamente, es la función logarítmica $f(x) = k \ln x$, donde k es un número positivo [1]). Este número se puede elegir arbitrariamente, ya que prácticamente determina la unidad de medición de las distancias en el espacio de velocidades relativista, pero tiene más sentido poner $k = 1/2$. En primer lugar, con esto serán más sencillas las operaciones y las fórmulas. En segundo lugar, lo que es, probablemente, más importante, para $k = 1/2$ en el caso de velocidades pequeñas obtendremos las fórmulas no relativistas conocidas.

En efecto, escribamos la expresión final de la distancia $\mathcal{V}$ entre los puntos P y Q por medio de la velocidad relativa de movimiento de los sistemas P y Q:

$$\| PQ \| = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v_{P|Q}}{1-v_{P|Q}}; \tag{4.11}$$

entonces para x pequeñas tenemos:

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + 2x + \frac{2x^2}{1-x} \right) \approx \frac{1}{2} \cdot 2x = x,$$

o sea, para $v_{P|Q} \ll 1$ la fórmula (4.11) se convierte en una fórmula no relativista: $| PQ | = v_{P|Q}$.

La distancia en el espacio $\mathcal{V}$ determinada de esta manera posee todas las propiedades propias del concepto matemático general de la distancia:

1) *La distancia $\mathcal{V}$ es simétrica*: $\| PQ \| = \| QP \|$, ya que $v_{P|Q} = v_{Q|P}$.

2) *La distancia $\| PQ \|$ es siempre no negativa y se anula cuando y sólo cuando $P = Q$*, ya que la magnitud $(1 + v_{P|Q})/(1 - v_{P|Q})$ siempre es mayor o igual que la unidad.

Se puede también demostrar (véase la secc. 4.8) que

---

[1]) En efecto, $\ln (xy) = \ln x + \ln y$. Además se puede demostrar que la función logarítmica es la única solución de la ecuación (4.10), más exactamente, cualquier función $f(x)$ no negativa (para $x \geqslant 1$) que satisface la ecuación (4.9) tiene la forma $k \ln x$.

3) La distancia $\mathcal{F}$ satisface la así llamada «desigualdad del triángulo»: para tres puntos $\mathcal{F}$ cualesquiera **P**, **Q** *y* **R** *tiene lugar la desigualdad*

$$\|\boldsymbol{PQ}\| \leqslant \|\boldsymbol{PR}\| + \|\boldsymbol{RQ}\|.$$

Haremos notar que si la velocidad del movimiento relativo $v_{P|Q}$ se acerca a la velocidad de la luz $c = 1$, entonces la distancia $\mathcal{F}$ entre los puntos **P** y **Q** crece ilimitadamente. Esto significa que al movimiento con la velocidad de la luz en el espacio de velocidades relativista le corresponden puntos alejados infinitamente. *En el mapa de velocidades* K_A de cualquier observador inercial A estos puntos se representan como puntos del absoluto, de la circunferencia Ω_A que limita el círculo K_A. La distancia $\mathcal{F}$ de cualquier punto del círculo K_A al punto del absoluto es igual a infinito, como ya se esperaba del razonamiento cualitativo planteado por nosotros en el capítulo anterior. Por otro lado, la distancia euclidiana en el mapa K_A medida entre dos puntos cualesquiera P y Q, que son imágenes de los puntos **P** y **Q** del espacio de velocidades relativista, no es mayor que el diámetro del círculo K_A, igual a 2. Aquí nos encontramos con la revelación de una dualidad excepcional: un espacio infinito $\mathcal{F}$ de curvatura negativa constante se representa en el mapa proyectivo como un círculo finito K_A, mientras que un espacio finito $\mathcal{L}$ de curvatura positiva constante, la esfera o el espacio de rayos, exige para su imagen proyectiva un mapa en forma de un plano infinito. Y de todas maneras este plano no es suficiente para la representación de todos los puntos. Por lo demás, los métodos de representación de estos dos espacios de curvatura constante en los mapas proyectivos tienen sorprendentemente mucho en común, y por eso, podemos casi literalmente trasladar al espacio de velocidades relativista las ideas y la experiencia que obtuvimos en el estudio de la geometría del espacio de rayos y de sus mapas proyectivos. Veréis la analogía en todo, incluso en los nombres y las propiedades de las funciones que de una manera natural surgen en estas dos geometrías. Recordemos, por ejemplo, la fórmula que expresa en la geometría de los rayos la dependencia de la distancia $|\boldsymbol{AB}|_L$ entre dos puntos, **A** y **B**, y la distancia $|AB|_A$ entre sus imágenes A y B en el mapa K_A:

$$|AB|_A = \operatorname{tg} |\boldsymbol{AB}|_L.$$

Una fórmula análoga en la geometría del espacio de velocidades relativista relaciona la distancia euclidiana $|AB|_A = v_{B|A}$ en el mapa K_A con la distancia $\|AB\|$ entre los puntos A y B en el espacio de velocidades $\mathcal{V}$. Esta fórmula puede deducirse a partir de la fórmula (4.11):

$$|AB|_A = v_{B|A} = \frac{e^{2\|AB\|}-1}{e^{2\|AB\|}+1} = \frac{e^{\|AB\|}-e^{-\|AB\|}}{e^{\|AB\|}+e^{-\|AB\|}}. \tag{4.12}$$

La función que aquí aparece $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ también se llama tangente, pero *tangente hiperbólica* y se denota como $y = \operatorname{th} x$. Con su ayuda se puede reescribir de una manera breve la formula (4.12) que expresa la velocidad relativa por medio de la distancia en el espacio de velocidades:

$$v_{B|A} = \operatorname{th} \|AB\| \tag{4.13}$$

Memoricemos esta fórmula, pues tendremos que utilizarla durante todo el libro.

Analicemos la tangente hiperbólica un poco más de cerca. En la fig. 4.9 se da la gráfica de la tangente hiperbólica. Se ve que para valores pequeños del argumento $\operatorname{th} x \approx x$, esto significa que la distancia en el espacio de velocidades $\|AB\|$ numéricamente casi coincide con la magnitud de la velocidad relativa $v_{B|A}$; si esta velocidad no es mayor que, digamos, un 20 % de la velocidad de la luz $v = 1$, entonces $v_{B|A} \approx \|AB\|$ con una exactitud no menor del 1 %.

Con el crecimiento del argumento la función $y = \operatorname{th} x$ se aproxima rapidamente al valor asintótico $y = 1$; por ejemplo, a la distancia en el espacio de velocidades $\|AB\| = 3$ le corresponde una velocidad del movimiento relativo muy cercana a la velocidad de la luz: $v_{B|A} = \operatorname{th} 3 \approx 0{,}995$.

Por algunas de sus propiedades la tangente hiperbólica recuerda bastante la tangente común. Escribamos, por ejemplo, con su ayuda la fórmula relativista de la composición de velocidades (4.5). Expresemos las velocidades que entran en ella por medio de las distancias $\mathcal{V}$ y denotemos $\|BA\| = x$ y $\|AC\| = y$; entonces $\|BC\| = x + y$, y la fórmula de la composición tomará la forma:

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}. \tag{4.14}$$

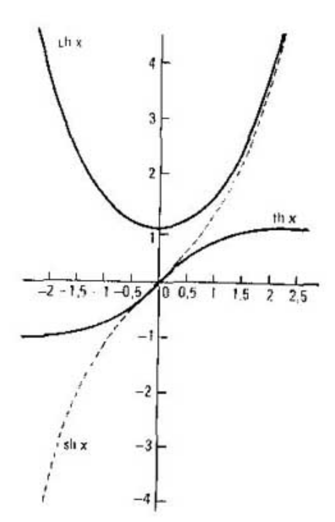


FIG. 4.9

Como vemos, la expresión para la tangente hiperbólica de la suma difiere de la fórmula común solamente por el signo en el denominador:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}.$$

El lector puede hacer la siguiente pregunta embarazosa: supongamos que esto es una tangente, pero ¿por qué es hiperbólica? Sobre esto y también sobre otras funciones hiperbólicas, distancias hiperbólicas y vueltas hiperbólicas se va a hablar detalladamente en el Apéndice.

4.5. RELACIONES METRICAS PARA EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En la sección anterior nos ocupamos de las relaciones métricas para el objeto más simple del espacio de velocidades relativista, la recta. Desde el punto de vista de la física, se vieron tres sistemas inerciales de referencia A, B y C, los cuales se movían de tal manera que para un observador

en cualquiera de ellos, las velocidades de los otros dos eran colineales. Desde el punto de vista de la geometría, estos son tres puntos A, B y C del espacio de velocidades relativista que pertenecen a una misma recta $\mathcal{F}$. Las únicas magnitudes medibles en este caso pueden ser solamente las tres velocidades relativas $v_{A|B}$, $v_{B|C}$ y $v_{A|C}$ y sus distancias correspondientes $\| AB \|$, $\| BC \|$ y $\| AC \|$.

Este, evidentemente, es un tipo muy particular de movimiento y un caso particular de distribución de los puntos $\mathcal{V}$. Se tiene una situación más general cuando las velocidades relativas de los sistemas de referencia A, B y C no son colineales. Entonces ya tienen sentido físico real nueve magnitudes medibles: las velocidades relativas y los ángulos entre ellas. Las enumeraremos:

el observador A mide $v_{B|A}$, $v_{C|A}$ y el ángulo α entre las direcciones de $\boldsymbol{v}_{B|A}$ y $\boldsymbol{v}_{C|A}$;

el observador B mide $v_{A|B}$, $v_{C|B}$ y el ángulo β entre las direcciones de $\boldsymbol{v}_{A|B}$ y $\boldsymbol{v}_{C|B}$;

el observador C mide $v_{A|C}$, $v_{B|C}$ y el ángulo γ entre las direcciones de $\boldsymbol{v}_{A|C}$ y $\boldsymbol{v}_{B|C}$.

En la lista se enumeran nueve magnitudes, pero no se puede, desde luego, dar sus valores independientemente uno de otro. Recordemos, por ejemplo, que

$$v_{B|A} = v_{A|B}, \quad v_{C|A} = v_{A|C}, \quad v_{B|C} = v_{C|B}. \tag{4.15}$$

Es claro que de las seis magnitudes que quedan, pueden ser independientes sólo tres, por ejemplo, $v_{B|A}$, $v_{C|A}$ y el ángulo α. Las otras magnitudes ya se pueden expresar por medio de estas, pero las dependencias correspondientes son mucho más complicadas que las fórmulas (4.15). Como en la cinemática no relativista, la forma de escritura más cómoda de estas relaciones es el lenguaje geométrico del espacio de velocidades.

En el espacio de velocidades relativista tres puntos A, B y C determinan un triángulo con lados AB, BC y CA, cuyas longitudes serán denotadas, correspondientemente, por c, a y b. El triángulo ABC está simbólicamente representado en la fig. 4.10, el cual ilustra nuestro sistema de notación. (Por lo pronto no es conveniente darle otro sentido a este dibujo). Las longitudes de los lados a, b y c están relacionadas con las magnitudes de las velocidades relativas: $v_{A|B} = \operatorname{th} c$, $v_{B|C} = \operatorname{th} a$ y $v_{C|A} = \operatorname{th} b$. Recordemos, ade-

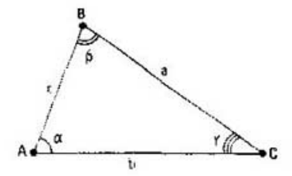


FIG. 4.10

más, que en el espacio de velocidades relativista la magnitud del ángulo $\widehat{BAC}$, con el cual se intersecan en el punto A las rectas AC y AB, es igual al ángulo entre los vectores de las velocidades $v_{C|A}$ y $v_{B|A}$, medidas por el observador A. Por eso, los ángulos de los vértices A, B y C de nuestro triángulo son iguales, correspondientemente, a los ángulos α, β y γ, medidos por los observadores inerciales A, B y C.

El problema, del cual nos vamos a ocupar en esta y las siguientes secciones, puede ser formulado ahora en términos geométricos familiares: *a partir de tres elementos conocidos del triángulo es necesario encontrar los tres restantes.*

Empezaremos, evidentemente, por el caso más simple de un triángulo rectángulo, todos los elementos del cual son determinados solamente por dos parámetros. Para ser más precisos, vamos a considerar que el ángulo recto del triángulo ABC es el ángulo $\gamma = \widehat{ACB}$. La idea básica de la deducción de las relaciones entre los lados y los ángulos del triángulo ABC en el espacio de velocidades relativista ya nos es conocida del capítulo anterior, en el cual con bastante provecho nos ocupamos de la geometría del espacio de rayos. Es necesario analizar la representación ABC del triángulo en un mapa proyectivo plano, escribir las relaciones euclidianas entre los lados y los ángulos del triángulo ABC en el mapa y de acuerdo a las reglas conocidas trasladarlas de nuevo al espacio inicial. En el caso del espacio de velocidades relativista estas reglas se reducen a que las distancias $|AB|$ y $|AC|$ en el mapa-$\mathcal{F}K_A$ se expresan por medio de las distancias $\mathcal{F}$ correspondientes con la ayuda de las fórmulas $|AB| = \text{th}\,\|AB\|$, $|AC| = \text{th}\,\|AC\|$ y el ángulo $\widehat{BAC}$ es igual al ángulo-$\mathcal{F}$ $\widehat{BAC}$. Pero en estas fórmulas entran tres de los seis elementos del triángulo, por eso, ellas todavía no permiten obtener algún resultado sustancial. En la

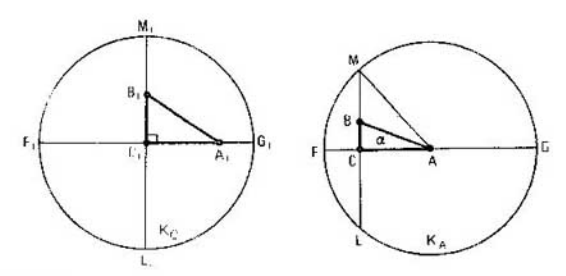


FIG. 4.11

deducción de las relaciones métricas en el espacio de rayos las dependencias que faltan se podrían obtener directamente de la construcción espacial de los mapas (véase la fórmula (3.4)). Ahora no tenemos esta posibilidad, pero por lo menos sabemos como pasar de un mapa a otro. Por eso, además del mapa K_A, tendremos que utilizar otro mapa $\mathscr{T}$ (el mapa K_C es el más conveniente) y trasladar al mapa K_A las dependencias entre los elementos del triángulo-$\mathscr{T}$ ABC y su imagen $A_1B_1C_1$ en el mapa K_C con ayuda de la transformación L_{CA}.

Así pues, veamos las imágenes ABC y $A_1B_1C_1$ del triángulo rectángulo ABC en los mapas K_A y K_C. (Todas las notaciones se entenderán de la fig. 4.11) El ángulo recto ACB de nuestro triángulo en el mapa K_C, evidentemente, se representa por el triángulo euclidiano recto $A_1C_1B_1$, ya que su vértice cae en el centro del mapa. Resulta que también en el mapa K_A el ángulo correspondiente $\acute{ACB}$ es recto. Esto en realidad no es una situación trivial: más tarde veremos que, como regla, las magnitudes de los ángulos del espacio de velocidades se trasladan a los *mapas* proyectivos con alteraciones (si, evidentemente, la imagen del vértice del ángulo no coincide con el centro del mapa). Representaremos la transformación L_{CA} del mapa K_C al mapa K_A en forma de una proyección central (fig. 4.12). Entonces el ángulo $\acute{ACB}$ será la proyección central del ángulo recto $A_1C_1B_1$. Veamos el plano $\sigma = (OFG)$, en el cual se encuentran los puntos A, C, A_1 y C_1. De la construcción se deriva que este plano es perpendicular al plano α del círculo K_A y al plano

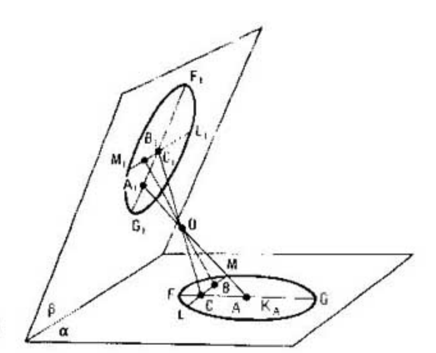


FIG. 4.12

β del círculo K_C. Además, ya que la recta B_1C_1 es perpendicular a la recta A_1C_1 y se encuentra en el plano β, el plano σ también es perpendicular a la recta B_1C_1 y, por lo tanto, al plano γ que pasa por los puntos B_1, C_1 y B, C. De esta manera, la recta BC pertenece a dos planos, los planos α y γ, perpendiculares al plano σ, lo que significa que la recta misma es perpendicular a este plano. En particular, la recta BC es perpendicular a la recta CA que se encuentra en el plano σ, o sea, $\widehat{BCA}$ *es un ángulo recto.*

Haciendo uso de esta misma proyección, expresaremos la longitud del lado BC en el mapa K_A por medio de las longitudes $\mathcal{F}$ de los lados del triángulo ABC. Nos es conocido que $|C_1B_1| = \text{th}\,\|CB\| = \text{th}\ a$, $|C_1M_1| = 1$ (este es el radio del mapa K_C) y $|CM| = \sqrt{|AM|^2 - |AC|^2} = \sqrt{1 - \text{th}^2 b}$ por el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo ABC en el mapa K_A (fig. 4.11). De la semejanza de los triángulos OBC y OB_1C_1, OMC y OM_1C_1 (véase la fig. 4.13, donde se muestra solamente el plano γ) se deriva que $|BC| : |B_1C_1| = |OC| : |OC_1| = |CM| : |C_1M_1|$. Por lo tanto,

$$|BC| = |B_1C_1| \cdot (|CM| : |C_1M_1|) = \text{th}\ a\ \sqrt{1 - \text{th}^2 b}. \tag{4.16}$$

Comparemos esta fórmula con la fórmula análoga (3.4) para el cateto BC del triángulo rectángulo ABC en el mapa proyectivo K_A del espacio de rayos. En el espacio de rayos la tan-

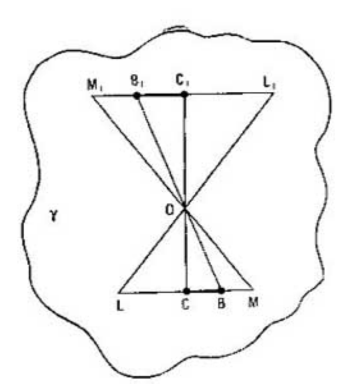


FIG. 4.13

gente «común» de la «longitud» del cateto BC del triángulo inicial se divide por el coseno de la «longitud» del otro cateto; en el espacio de velocidades la *tangente hiperbólica* de la longitud-$\mathcal{F}$ a del cateto BC se multiplica por el coeficiente $\sqrt{1-\operatorname{th}^2 b}$, donde b es la longitud $\mathcal{F}$ del otro cateto. Recordemos, además, la fórmula trigonométrica estándar $1 + \operatorname{tg}^2 \beta = 1/\cos^2 \beta$. Parece que tenemos todo el derecho de introducir la función especial $\operatorname{ch} b = 1/\sqrt{1-\operatorname{th}^2 b}$ y llamarla *coseno hiperbólico*. Ahora la fórmula (4.16) toma una forma que es completamente análoga a la fórmula (3.4):

$$|BC| = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b}. \tag{4.17}$$

Ya nos aparecieron dos funciones hiperbólicas. Vale la pena hablar de ellas un poco más detalladamente. El coseno hiperbólico se expresa de una forma muy sencilla por medio de la función exponencial e^x; en efecto:

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x = 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 =$$
$$= \left(1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)\left(1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) =$$
$$= \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2,$$

por lo tanto,

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ahora introduciremos la tercera función hiperbólica «restante», el *seno hiperbólico* $\operatorname{sh} x$. La definiremos de tal manera que se cumpla la igualdad $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$. Evidentemente, para esto es necesario escribir

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Recordemos la identidad trigonométrica básica: $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Por medio de una simple substitución podemos convencernos de que la identidad «hiperbólica» básica es la siguiente:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Memorícese esta identidad tan bien como se recuerda la identidad trigonométrica básica, ¡nos será de utilidad muchas veces! En general, las funciones «hiperbólicas» son muy parecidas a las fórmulas trigonométricas, sólo que en algunos lugares se encontrará en ellas un signo más en lugar de un singo menos y viceversa. Esto, claro está, no es casual, ya que unas y otras funciones aparecen «por sí mismas» en el estudio de las geometrías de los espacios, los cuales son muy parecidos (tienen una curvatura constante) y al mismo tiempo son diferentes: en un caso la curvatura es positiva (el espacio de rayos) y en el otro es negativa (el espacio de velocidades relativista). La diferencia se hace sobre todo notoria, si se ven las gráficas de las funciones hiperbólicas en la fig. 4.9. En esta figura también se dan las fórmulas básicas de la «trigonometría hiperbólica». Es sorprendente lo diferentes que son las gráficas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas y como son tan parecidas las relaciones algebraicas entre ellas [1]. ¡Lo que significa «equivocarse» en el signo en alguna parte!

Pero regresemos a nuestro problema básico, la deducción de las relaciones métricas en el triángulo-$\mathcal{V}$ rectángulo. Todo está listo para esto y solamente resta recoger la cosecha.

Veamos el triángulo rectángulo ABC en el mapa K_A (fig. 4.11). Sus tres lados y dos ángulos están expresados por medio de los lados y los ángulos de su preimagen, el trián-

---

[1] Las profundas causas de esta analogía son aclaradas en el Apéndice.

gulo ABC en el espacio de velocidades relativista:

$$BAC = \alpha, \quad BCA = \gamma = \pi/2,$$
$$|AC| = \operatorname{th} b, \quad |AB| = \operatorname{th} c,$$
$$|BC| = \operatorname{th} a / \operatorname{ch} b. \tag{4.18}$$

Escribiendo las relaciones métricas euclidianas en el triángulo ABC, obtendremos las relaciones métricas correspondientes en el triángulo **ABC** en el espacio de velocidades.

Un cateto, una hipotenusa y el ángulo entre ellos. En el triángulo ABC tiene lugar la fórmula $|AC| = |AB| \times \cos\alpha$. Substituyendo en ella $|AC| = \operatorname{th} b$ y $|AB| = \operatorname{th} c$, obtendremos la fórmula correspondiente para el triángulo ABC.

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha. \tag{4.19}$$

Dos catetos y un ángulo agudo. En el triángulo ABC: $|BC| = |AC| \operatorname{tg} \alpha$. De aquí

$$\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b} = \operatorname{th} b \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b} \operatorname{tg}\alpha,$$

por lo tanto,

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha. \tag{4.20}$$

Dos catetos y una hipotenusa (teorema de Pitágoras). En el triángulo ABC: $|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$, por eso,

$$\operatorname{th}^2 c = \frac{\operatorname{th}^2 a}{\operatorname{ch}^2 b} + \operatorname{th}^2 b.$$

Transformemos esta igualdad expresando los cuadrados de las tangentes hiperbólicas por medio de los cosenos con ayuda de la fórmula $\operatorname{th}^2 a = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}$:

$$1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 c} = \frac{\operatorname{th}^2 a}{\operatorname{ch}^2 b} + 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 b} = 1 - \frac{1 - \operatorname{th}^2 a}{\operatorname{ch}^2 b} =$$
$$= 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b}.$$

Comparando el primero y segundo miembros, obtendremos que $\operatorname{ch}^2 c = \operatorname{ch}^2 a \operatorname{ch}^2 b$ ó

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \tag{4.21}$$

Una hipotenusa, un cateto y el ángulo opuesto a éste. En el triángulo ABC tenemos: $|BC| = |AB| \operatorname{sen} \alpha$. De aquí hallamos que

$$\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b} = \operatorname{th} c \operatorname{sen} \alpha.$$

Transformemos el primer miembro, haciendo uso del «teorema de Pitágoras» (4.21):

$$\frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{ch} b} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} c}.$$

Substituyendo este resultado en el primer miembro de la relación anterior y recordando que $\operatorname{th} c = \operatorname{sh} c/\operatorname{ch} c$, para el triángulo ABC obtendremos:

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \operatorname{sen} \alpha. \tag{4.22}$$

Con las fórmulas (4.19)...(4.22) se agotan las relaciones métricas en un triángulo rectángulo en el espacio de velocidades, las cuales pueden ser deducidas directamente de las relaciones euclidianas para un triángulo rectángulo. Pero combinando estas fórmulas se puede obtener una serie de relaciones nuevas, interesantes y útiles, que no tienen una analogía directa en la geometría euclidiana.

Una hipotenusa y dos ángulos agudos. De acuerdo a la fórmula (4.20) tenemos $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{th} a/\operatorname{sh} b$. Para el otro ángulo agudo β del triángulo ABC será cierta la fórmula análoga $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{th} b/\operatorname{sh} a$. Multiplicaremos estas igualdades:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{th} a \operatorname{th} b}{\operatorname{sh} b \operatorname{sh} a} = \frac{1}{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b} = \frac{1}{\operatorname{ch} c}.$$

Aquí nosotros hicimos uso de que $\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x$ y del «teorema de Pitágoras» $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$. Como resultado obtendremos que la hipotenusa de un triángulo-$\mathcal{F}$ rectángulo se determina unívocamente por sus dos ángulos agudos:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta. \tag{4.23}$$

Ahora queda claro que también sus catetos se calculan a partir de los dos ángulos agudos; les proponemos a los lectores demostrar por sí mismos que

$$\operatorname{ch} a = \cos \alpha/\operatorname{sen} \beta. \tag{4.24}$$

En las siguientes secciones de este capítulo todavía deliberaremos sobre las excepcionales propiedades geométricas del espacio de velocidades relativista, cuyo reflejo son estas

fórmulas. Por lo pronto nos limitaremos a subrayar otra vez el asombroso parecido de las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo en la geometría esférica (o la geometría del espacio de rayos) y en la geometría del espacio de velocidades relativista. ¡Todas nuestras fórmulas pueden ser obtenidas de las fórmulas de la geometría esférica, si en estas últimas se substituyen las funciones trigonométricas de las distancias esféricas por las funciones hiperbólicas correspondientes de las distancias $\mathcal{V}$ en el espacio de velocidades!

4.6. TEOREMAS DE LOS COSENOS Y LOS SENOS

En el estudio de la geometría es difícil prescindir de los esquemas y dibujos. Pero el lector ya entiende que en una hoja plana de papel es imposible dibujar una sola figura geométrica del espacio de velocidades sin desfigurar sus distancias o ángulos. Se podría hacer uso constante de cierto mapa concreto del espacio $\mathcal{V}$, pero entonces nos privaríamos de muchas ventajas contenidas en la idea misma del espacio de velocidades relativista. Pues un mapa concreto relacionado con un observador concreto refleja su «punto de vista concreto» sobre cualquier figura o grafo en el espacio $\mathcal{V}$ relativista; otro observador en su mapa debe representar esta misma figura de otra manera. La idea fundamental del espacio de velocidades relativista consiste precisamente en abstraerse de este punto de vista concreto y dibujar en el espacio $\mathcal{V}$ grafos y figuras, que pueden ser vistos después por cualquier observador y construir su propio mapa que ya refleja los resultados de sus propias mediciones.

Por eso, nos pondremos de acuerdo en representar en una hoja de papel directamente las mismas figuras geométricas (o grafos) del espacio de velocidades relativista, introduciendo intencionadamente en los dibujos algunas desfiguraciones, por ejemplo, unas rectas $\mathcal{V}$ van a representarse con rectas euclidianas y otras con líneas curvas que simbolizan la curvatura del espacio mismo $\mathcal{V}$. Ahora el espacio de velocidades va a ocupar, por así decirlo, todo el plano del dibujo, los puntos del absoluto van a estar en realidad «infinitamente alejados» y cualquier recta $\mathcal{V}$ en el dibujo se va a poder continuar ilimitadamente (claro, imaginariamente)

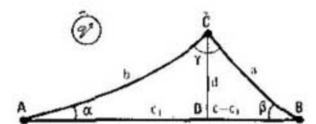


FIG. 4.14

hacia cualquier lado. Unas y otras condiciones son inevitables cuando nosotros dibujamos en el plano algo que ya no cabe en él, sea el dibujo de una pieza mecánica o el retrato de una persona.

El primero de estos dibujos va a ser la fig. 4.14. En ella está representado un triángulo $\mathscr{T}$ arbitrario ABC, en el cual del vértice C al lado AB está trazada la altura CD. Nosotros haremos uso de este dibujo en la demostración de tres teoremas importantísimos de la «trigonometría $\mathscr{T}$»: dos (!) teoremas de los cosenos y el teorema de los senos. Todos los principales resultados del párrafo anterior son sus casos particulares. Las demostraciones de estos teoremas se realizan por el mismo plan que las demostraciones de los teoremas comunes escolares de los senos y los cosenos. La altura CD divide nuestro triángulo en dos triángulos rectángulos (suponemos que el punto-$\mathscr{T}$ D se encuentra entre A y B; en caso contrario el razonamiento exige ciertos cambios no muy grandes, que lo proponemos al lector introducir). Escribiendo las relaciones apropiadas para los triángulos rectángulos ACD y BCD y eliminando de ellas las magnitudes intermedias, por ejemplo, la longitud de la altura CD, obtendremos las relaciones buscadas. Antes de empezar a cumplir este programa, escribiremos y demostraremos la fórmula para el coseno hiperbólico de la diferencia de dos argumentos. Esta fórmula es muy parecida a la fórmula análoga para las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{ch}(x-y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad (4.25)$$

La demostración se reduce a una simple cadena de transformaciones:

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{4}\left[(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) - \right.$$

$$\left. -(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})\right] = \frac{1}{4}\left[e^x e^y + e^{-x}e^{-y} + e^x e^{-y} + \right.$$

$$\left. + e^{-x}e^y - e^x e^y - e^{-x}e^{-y} + e^x e^{-y} + e^{-x}e^y\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot 2\left[e^{x-y} + e^{-(x-y)}\right] = \operatorname{ch}(x-y).$$

Denotaremos las longitudes $\mathcal{F}$ de los lados del triángulo ABC por $a = \| BC \|$, $b = \| AC \|$ y $c = \| AB \|$, y las magnitudes de sus ángulos por $\alpha = \hat{A}$, $\beta = \hat{B}$ y $\gamma = \hat{C}$; además, sea $d = \| CD \|$ la longitud de la altura y $c_1 = \| AD \|$, por lo tanto, $\| DB \| = c - c_1$.

Primer teorema de los cosenos.

$$\text{ch } a = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{sh } b \text{ sh } c \cos \alpha. \qquad (4.26)$$

Demostración. Aplicaremos el «teorema de Pitágoras» (4.21) al triángulo rectángulo BCD: $\text{ch } a = \text{ch } d \text{ ch } (c - c_1)$. Después haremos uso de la fórmula (4.25) y de nuevo del «teorema de Pitágoras» para el triángulo ACD:

$$\text{ch } a = \text{ch } d \text{ ch } (c - c_1) = \text{ch } d (\text{ch } c \text{ ch } c_1 - \text{sh } c \text{ sh } c_1) =$$
$$= \text{ch } d \text{ ch } c_1 (\text{ch } c - \text{sh } c \text{ th } c_1) = \text{ch } b \text{ ch } c -$$
$$- \text{sh } c \text{ ch } b \text{ th } c_1 = \text{ch } b \text{ ch } c - \text{sh } b \text{ sh } c \cos \alpha.$$

En la última transformación hemos tomado en cuenta que en virtud de (4.19) tenemos $\text{th } c_1 = \text{th } b \cos \alpha$, y por eso, $\text{ch } b \text{ th } c_1 = \text{sh } b \cos \alpha$.

Segundo teorema de los cosenos.

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \text{sen } \beta \text{ sen } \gamma \text{ ch } a. \qquad (4.27)$$

Demostración. Denotaremos las magnitudes de los ángulos ACD y DCB por γ_1 y γ_2 correspondientemente. Aplicaremos la fórmula (4.24) a los triángulos ACD y BCD:

$$\text{ch } d = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \gamma_1} = \frac{\cos \beta}{\text{sen } \gamma_2}, \quad \text{de donde}$$
$$\cos \alpha = \cos \beta \frac{\text{sen } \gamma_1}{\text{sen } \gamma_2} = \cos \beta \frac{\text{sen } (\gamma - \gamma_2)}{\text{sen } \gamma_2}.$$

Ahora abramos $\text{sen } (\gamma - \gamma_2)$:

$$\cos \alpha = \cos \beta \text{ sen } \gamma \text{ ctg } \gamma_2 - \cos \beta \cos \gamma =$$
$$= -\cos \beta \cos \gamma + \text{sen } \beta \text{ sen } \gamma \text{ ch } a,$$

ya que, de acuerdo a (4.23), tiene lugar la relación
$$\cos \beta \text{ ctg } \gamma_2 = \cos \beta \text{ tg } \beta \text{ ch } a = \text{sen } \beta \text{ ch } a.$$

Teorema de los senos.

$$\frac{\text{sh } a}{\text{sen } \alpha} = \frac{\text{sh } b}{\text{sen } \beta} = \frac{\text{sh } c}{\text{sen } \gamma}. \qquad (4.28)$$

Demostración. Haciendo uso de la fórmula (4.22), de los

dos triángulos rectángulos ACD y BCD expresaremos el cateto CD mediante sus hipotenusas y los ángulos opuestos:

$$\operatorname{sh} d = \operatorname{sh} b \operatorname{sen} \alpha; \ \operatorname{sh} d = \operatorname{sh} a \operatorname{sen} \beta.$$

De aquí obtenemos que

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sen} \beta}. \qquad (4.29)$$

De una manera análoga se demuestra la segunda igualdad que entra en el enunciado del teorema.

Es evidente el parecido del (primer) teorema de los cosenos y del teorema de los senos de la geometría del espacio de velocidades relativista con los teoremas euclidianos homónimos. Ante todo, unos y otros teoremas permiten resolver problemas iguales, por ejemplo, los teoremas de los senos en ambas geometrías permiten encontrar dos lados de un triángulo a partir del tercer lado y los ángulos adyacentes a él. Pero entre ellos existe una relación más profunda. Cuando las longitudes de los lados de los triángulos $\mathscr{V}$ se hacen pequeñas, las fórmulas de la trigonometría $\mathscr{V}$ se transforman en los teoremas correspondientes de la planimetría. En otras palabras, la geometría del espacio de velocidades relativista se hace casi euclidiana, si las velocidades son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Este es el reflejo geométrico del hecho de que para velocidades pequeñas la cinemática relativista pasa a ser clásica. Veamos este paso al límite en el ejemplo del teorema de los senos.

Hallemos la derivada de la función $\operatorname{sh} x$; $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$. (Esta es una analogía más con las funciones trigonométricas comunes, ya que $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$.) Ya que $\operatorname{ch} 0 = 1$, para velocidades pequeñas tenemos que $\operatorname{sh} x \approx x$. Por eso, para a, b y c pequeños, el teorema $\mathscr{V}$ de los senos se convierte en el teorema euclidiano de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}.$$

De una manera análoga, utilizando la igualdad aproximada para x pequeñas $\operatorname{ch} x \approx 1 + x^2/2$, se puede uno convencer de que el primer teorema $\mathscr{V}$ de los cosenos en el límite se transforma en el teorema euclidiano de los cosenos (¡compruébelo!). No queda claro solamente el papel del

segundo teorema de los cosenos. Haremos tender su magnitud a hacia cero; entonces ch $a \to 1$, y obtendremos la igualdad:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma = \cos(\pi - \beta - \gamma). \quad (4.30)$$

De aquí se deriva que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, así es que el segundo teorema $\mathcal{V}$ de los cosenos en el límite no relativista corresponde al teorema euclidiano de la suma de los ángulos de un triángulo.

4.7. LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI Y EL ESPACIO DE VELOCIDADES

En 1829 en el «Mensajero de Kazán», que era editado por la Universidad de Kazán, fue publicado el trabajo de N. I. Lobachevski «Acerca de los principios de geometría». En este trabajo fue resuelto el problema que preocupaba, en el transcurso de casi dos mil años, a los matemáticos de diferentes tiempos y países, de Ptolemeo a Legendre, el problema del quinto postulado de Euclides. En la actualidad se formula como el axioma de las paralelas: *«por un punto exterior a una recta dada puede trazarse una y sólo una recta paralela a la primera»* (o sea, situada en el mismo plano que la recta dada y que no interseca a la misma). Entre otros postulados y axiomas, antepuestos por Euclides al primer libro de sus famosos «Elementos», el quinto postulado (particularmente en el planteamiento original de Euclides) notablemente se diferenciaba por su complejidad y falta de claridad. Por eso, desde tiempos remotos los geómetras trataron de excluirlo del número de proposiciones iniciales de la geometría aceptadas sin demostración. Unos se daban cuenta perfectamente de que construir una geometría sin este postulado o sin uno equivalente a éste era imposible, pero proponían sustituirlo por una, según ellos, afirmación más evidente. Otros, por su lado, probaron deducir lógicamente el quinto postulado a partir de afirmaciones establecidas independientemente de él y que no causaban duda. He aquí lo que escribía el matemático y filósofo suizo del siglo XVIII Heinrich Lambert en la obra «Teoría de las líneas paralelas» acerca de estos in-

tentos: «Las demostraciones del postulado de Euclides pueden ser llevadas tan lejos que, por lo visto, queda sólo una bagatela despreciable. Pero al hacer un análisis detallado resulta que en esta aparente bagatela se concentra toda la esencia del asunto: comúnmente la misma contiene ya sea una proposición demostrable, o un postulado equivalente a ella». Con más frecuencia las demostraciones del quinto postulado se realizaban por reducción al absurdo, o sea, se suponía que el mismo no se cumple, es decir, que a través de un punto exterior a una recta dada pasa más de una recta que no interseca a la dada, y después se construía una cadena de corolarios lógicos a partir de esta suposición en la esperanza de obtener una afirmación que contradiga los teoremas demostrados en base a otros axiomas y postulados.

Lobachevski partía también de esta suposición. Pero gradualmente llegó a la conclusión de que la misma no nos conducirá nunca a una contradicción; de que el conjunto de sus corolarios forma un nuevo sistema geométrico, tan consecuente como la geometría de Euclides. Desde luego, en ella había mucho de sorprendente y desacostumbrado, que contradecía el sentido común tradicional, educado por nuestras sensaciones inmediatas. Sin embargo, su armonía interna y lo lógico de esta teoría, llamada por Lobachevski «geometría imaginaria», su amplitud y profundidad convencían, a cualquiera que la estudiaba, de que la misma no es contradictoria. Por cierto que ni N. I. Lobachevski ni el otro creador de la geometría no euclidiana, el notable matemático húngaro Janos Bolyai, no pudieron ser testigos del triunfo de sus ideas. Bolyai, independientemente de Lobachevski y casi al mismo tiempo, llegó a los resultados similares, pero los publicó un poco más tarde, en 1832. Tanto en Rusia como en Europa la nueva teoría chocó con una pared de incomprensión. Demasiado grande resultó la fuerza de inercia, demasiado no habituales eran las nuevas ideas y además, estaban expuestas en una forma demasiado compacta. Aun el «rey de los matemáticos», el gran C. F. Gauss, quien como se supo de sus apuntes, también elaboraba una geometría no euclidiana, no sólo no se decidió a publicar sus investigaciones, sino que obligó a todos los que eran conocidos con ellas a guardarlas en estricto secreto. El comprendía perfectamente qué tempestad de indignación podía provocar tan herética transformación de las representaciones establecidas.

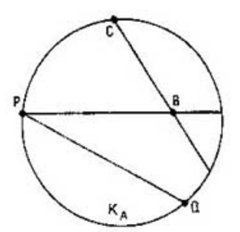


FIG. 4.15

La geometría de Lobachevski, que surgió dentro de las matemáticas «puras», durante mucho tiempo fue considerada desprovista de relación con el mundo físico real. Y sólo después de casi cien años, después de la creación de la teoría de la relatividad quedó claro que estas dos teorías revolucionarias y no habituales, como la teoría de la relatividad de A. Einstein y la geometría de Lobachevski están unidas en un todo por el concepto de «espacio relativista de velocidades». Al estudiar la geometría de este espacio, estudiamos al mismo tiempo la geometría de Lobachevski, ya que en el espacio relativista de velocidades se cumple su postulado fundamental: por un punto exterior a una recta pasa más de una recta que no se interseca con la dada.

Efectivamente, veamos la representación del espacio $\mathscr{V}$ en su mapa, o sea en el círculo K_A. Cada recta $\mathscr{V}$ del espacio de velocidades será representada en el mapa por una cierta cuerda PQ del círculo K_A (fig. 4.15). Los puntos de frontera P y Q de la cuerda PQ están situados en el absoluto K_A, o sea, corresponden a los puntos infinitamente alejados del espacio $\mathscr{V}$. A través del punto B, situado fuera de la recta PQ, se pueden trazar más de una cuerda, que no se interseca con la cuerda PQ *dentro* del círculo K_A, por ejemplo, las cuerdas PB y BC en la fig. 4.15. Esto significa que en el espacio $\mathscr{V}$ a través del punto B, exterior a la recta PQ, pasa más de una recta que no se interseca con la recta $\mathscr{V}$ dada PQ.

Así, en el espacio relativista de velocidades, el axioma euclidiano de las paralelas es inválido. A la vez, utilizando los mapas de las velocidades, se puede comprobar que todos los demás axiomas de la geometría euclidiana[1]) en el espacio

[1]) La lista de estos axiomas se puede hallar en los manuales escolares de geometría.

$\mathcal{V}$ (del que se eliminó el absoluto) se cumplen. En su mayor parte esta verificación no es difícil y, como nos parece, sirve de ejercicio útil a los lectores; algunos momentos más complejos se discuten en el complemento al final de este capítulo. Ahora con todo el derecho podemos formular nuestra principal conclusión:

> *la geometría del espacio de velocidades relativista es la geometría de Lobachevski.*

4.8. SORPRESAS DE LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

No entra dentro de nuestros objetivos un relato detallado acerca de la geometría de Lobachevski, a nosotros nos interesa su aplicación a la física. Pero la tentación resultó muy grande y a pesar de todo decidimos dar a conocer al lector algunos hechos de la geometría de Lobachevski, comparándolos con los respectivos teoremas euclidianos.

Ocupémonos primeramente de las propiedades de las figuras más sencillas, o sea, de las rectas. Veamos de nuevo la recta-$\mathcal{V}$ ***PQ***, el punto ***B***, no situado en ella, y su representación en K_A (fig. 4.15). Todas las rectas que no se intersecan con ***PQ*** pueden ser divididas en dos clases: las rectas del tipo ***BC*** que no tienen puntos comunes con ***PQ*** en el círculo K_A (se llaman «divergentes» con ***PQ***). y dos rectas ***PB*** y ***BQ*** que se «intersecan» con ***PQ*** en el absoluto, o sea, en los puntos infinitamente alejados ***P*** y ***Q*** del espacio $\mathcal{V}$. Estas rectas se llaman «paralelas (hacia el lado ***P*** y hacia el lado ***Q***) a la recta ***PQ*** en el sentido de Lobachevski».

Evidentemente, la recta ***BP***, paralela en el sentido de Lobachevski a la recta dada ***PQ*** (fig. 4.16), puede ser vista como la posición límite de la recta ***BA'***, que interseca ***PQ***

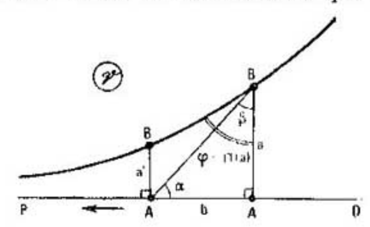


FIG. 4.16

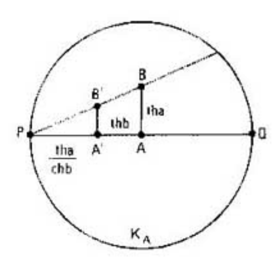


FIG. 4.17

en el punto A', cuando el punto A' se aleja al infinito, o sea, al absoluto. (Por cierto, en esto, el sentido de paralelas según Lobachevski y según Euclides es por completo análogo.) Veamos algunos corolarios interesantes de este paso límite.

Consideraremos que la recta BA es perpendicular a PQ y $\| BA \| = a$. Aplicando la fórmula (4.20) al triángulo rectángulo $AA'B$ obtenemos (véase la fig. 4.16, en la que se indican las notaciones):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{th} \| AB \|}{\operatorname{sh} \| AA' \|} = \frac{\operatorname{th} a}{\operatorname{sh} b} \to 0 \qquad (4.31)$$

cuando $b = \| AA' \| \to \infty$, o sea, cuando $A' \to P$. Esto significa que la misma magnitud α del ángulo $AA'B$ tiende a 0 cuando $A' \to P$; con otras palabras, *las rectas $\mathscr{V}$ paralelas (según Lobachevski) convergen en el absoluto bajo un ángulo nulo.* Subrayemos, sin embargo, que en el mapa de velocidades, el correspondiente ángulo euclidiano entre las cuerdas AP y BP, desde luego, no es igual a cero (fig. 4.17), o sea, como se dijo antes, los ángulos $\mathscr{V}$ se representan en los mapas de velocidades con alteraciones y, a veces, bastante notables.

En el hecho de que entre rectas paralelas el ángulo es igual a cero no hay nada no euclidiano aún. Pero calculemos el ángulo $\varphi = \widehat{ABP}$ (fig. 4.16) entre la recta BP y la perpendicular a su recta paralela PQ (en la geometría de Euclides este ángulo es, desde luego, recto). Supongamos que β es el ángulo entre la secante BA' y la perpendicular AB; entonces $\beta \to \varphi$, cuando A' se aleja al absoluto ($A' \to P$). Según la fórmula (4.19) $\cos \beta = \operatorname{th} a / \operatorname{th} \| BA' \|$ y como $\| BA' \| \to \infty$, y $\operatorname{th} \| BA' \| \to 1$ cuando $A' \to P$, pasando al límite

obtenemos: $\cos \varphi = \operatorname{th} a$. ¡De aquí se ve que este ángulo es siempre agudo (ya que $0 < \operatorname{th} a < 1$)! Este ángulo se llama *ángulo de paralelismo* y se denota con $\Pi(a)$; éste se determina por completo mediante la distancia a del punto B a la recta PQ. Así, hemos deducido la famosa fórmula de Lobachevski

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{th} a, \tag{4.32}$$

que juega en su trabajo un papel clave. (En el siguiente capítulo veremos que el ángulo de paralelismo tiene una relación directa con la aberración de la luz de las estrellas.)

Veamos ahora cómo varía la distancia desde los puntos de una de las dos rectas paralelas hasta la otra (en la geometría euclidiana ésta es idéntica para todos los puntos). Utilizaremos de nuevo las notaciones de la fig. 4.16. Pasemos al mapa K_A (fig. 4.17). De la semejanza de los triángulos ABP y $A'B'P'$ se deduce que $\frac{|A'B'|}{|A'P|} = \frac{|AB|}{|AP|}$. Expresemos las longitudes (comunes) de los segmentos en el mapa K_A en esta igualdad a través de las distancias $\mathcal{F}$ correspondientes (véase la fórmula (4.18)):

$$|A'B'| = \operatorname{th} a'/\operatorname{ch} b, \quad |AB| = \operatorname{th} a, \quad |AP| = 1,$$
$$|A'P| = |AP| - |AA'| = 1 - \operatorname{th} b,$$

(donde $a' = \| A'B' \|$, $b = \| AA' \|$). De aquí

$$\frac{\operatorname{th} a'}{\operatorname{ch} b\,(1 - \operatorname{th} b)} = \operatorname{th} a$$

o bien

$$\operatorname{th} a' = \operatorname{th} a\,(\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b) = \operatorname{th} a \cdot e^{-b}. \tag{4.33}$$

Dedujimos esta fórmula considerando que los puntos A' y B' se hallan a un mismo lado de la recta AB, al igual que al punto P, al que convergen nuestras rectas $\mathcal{F}$ paralelas en el absoluto. Pero si los puntos A' y B' están situados al otro lado de la recta AB (fig. 4.18), entonces

$$\operatorname{th} a' = \operatorname{th} a \cdot e^{b}. \tag{4.34}$$

Se demuestra esta fórmula del mismo modo que (4.33). De las fórmulas (4.33) y (4.34) resulta automáticamente el siguiente teorema de la geometría de Lobachevski: *las distan-*

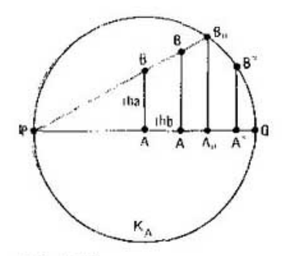


FIG. 4.18

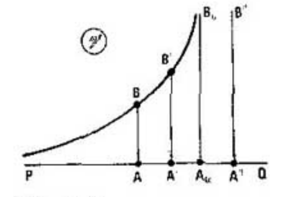


FIG. 4.19

cias desde los puntos de una de las dos rectas paralelas hasta la otra tienden a cero al desplazarnos hacia el lado, donde estas rectas convergen en el absoluto y aumentan ilimitadamente en dirección contraria.

Señalemos que al acercarse el punto A' a Q a lo largo de la recta PQ se observa ya un fenómeno por completo fuera de lo común desde el punto de vista euclidiano: en un cierto momento la perpendicular $A'B'$ a la recta PQ se vuelve paralela (según Lobachevski) a la recta BP, que es paralela a PQ (la recta A_0B_0 en la fig. 4.18). Esta posición crítica de A_0B_0 se halla fácilmente de la fórmula (4.34): cuando $A' \to A_0$ la parte izquierda de esta fórmula debe tender a 1 ($a' \to \infty$). por eso, $\operatorname{th} a \cdot e^{b_0} = 1$, $b_0 = \| AA_0 \|$, o $b_0 = -\ln \operatorname{th} a$. Si desplazamos la base de la perpendicular más allá del punto A_0 (recta $A''B''$ en la fig. 4.18), la misma se vuelve divergente con la recta BP. La fig. 4.19 ilustra esta situación en el mismo espacio $\mathscr{V}$.

Análogamente se demuestra que la distancia desde los puntos de una de las rectas divergentes hasta la otra recta, crece ilimitadamente al acercarnos al absoluto en cualquier dirección (fig. 4.20).

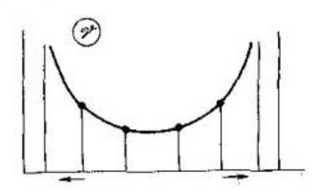


FIG. 4.20

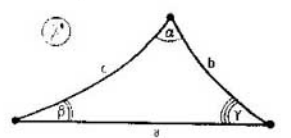


FIG. 4.21

Analicemos ahora algunas de las propiedades más sencillas de los triángulos en la geometría de Lobachevski. Ante todo demostremos la «desigualdad del triángulo», o sea, *la suma de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que el tercer lado* (la misma fue recordada en la sección 4.4). Supongamos que a es el lado mayor de un triángulo, b y c, los otros dos lados y α, el ángulo entre ellos (fig. 4.21). Es suficiente demostrar que $a < b + c$. Según el teorema de los cosenos $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos \alpha < \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c + \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch} (b + c)$; de donde $a < b + c$, ya que la función $\operatorname{ch} x$ crece para $x \geqslant 0$.

La segunda propiedad importante que demostraremos es el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo: *la suma de los ángulos de un triángulo en la geometría de Lobachevski es siempre menor que* π. Este teorema se demuestra casi igual que la desigualdad del triángulo, únicamente que el primer teorema de los cosenos tiene que ser sustituido por el segundo, o sea, para los ángulos (fig. 4.21): $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \operatorname{ch} a$. Considerando que $\operatorname{ch} a > 1$, obtenemos: $\cos \alpha > -\cos \beta \cos \gamma + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = -\cos (\beta + \gamma)$, o sea, $\cos \alpha + \cos (\beta + \gamma) > 0$ o bien

$$\cos \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} > 0. \qquad (4.35)$$

Consideraremos que α es el mayor de los ángulos del triángulo; entonces $\beta + \gamma < \alpha + \pi$, además evidentemente, $\beta + \gamma > \alpha - \pi$, por eso $-\frac{\pi}{2} < \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ y el segundo factor en la desigualdad (4.35) es positivo. Por lo tanto, $\cos \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > 0$, de donde $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Así pues, confirmamos el resultado fundamental del capítulo 3, o sea, el espacio de velocidades relativista es un espacio de curvatura constante negativa.

Señalemos además un hecho notable que resulta del segundo teorema de los cosenos. Conociendo la magnitud de los ángulos de un triángulo, se puede hallar también la lon-

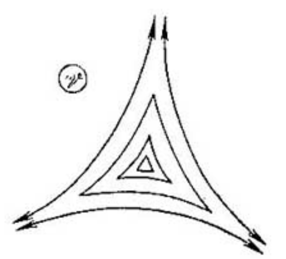


FIG. 4.22

gitud de sus lados (por ejemplo, ch $a = (\cos\alpha + \cos\beta \times$ $\times \cos\gamma)/\text{sen}\,\beta\,\text{sen}\,\gamma)$. Por eso, en la geometría de Lobachevski, dos triángulos con los correspondientes ángulos iguales, tienen los correspondientes lados iguales, o sea, son congruentes. De aquí se deduce que en la geometría de Lobachevski ¡no hay triángulos[1]) semejantes! (pero no congruentes). En la fig. 4.22 se representan simbólicamente algunos triángulos equiláteros en el espacio $\mathscr{V}$. Cuanto más largos sean sus lados, tanto menores serán sus ángulos, pero el mayor de los «triángulos», cuyos vértices se hallan en el absoluto tiene ángulos nulos. En general, al disminuir la suma de los ángulos de un triángulo su área aumenta, y más exactamente, el área de un triángulo es proporcional a su *defecto angular* $\Delta = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ (al mismo tiempo en la geometría esférica el área de un triángulo es proporcional a su *exceso angular* $\Delta' = \alpha + \beta + \gamma - \pi$, véase el complemento 5 al capítulo 3).

Al terminar nuestra pequeña excursión por la geometría de Lobachevski no podemos dejar de subrayar el asombroso hecho, de que la «geometría imaginaria», que surgió en forma puramente especulativa a partir de los intentos por demostrar el quinto postulado de Euclides, después de casi cien años halló su verdadera expresión física en el espacio de velocidades relativista, que constaba, por cierto, de algunos «puntos» no comunes. Encontramos aquí una de las expresiones más sorprendentes de lo que el físico americano, Premio Nobel E. Wigner llamaba «efectividad incomprensible de las matemáticas en las ciencias naturales»[2]).

---

[1]) Esto se deduce también de los problemas formulados en el complemento 8 de este capítulo.

[2]) *Wigner E.* Estudios acerca de la simetría.— M.: Mir, 1971, p. 182 (en ruso).

1. Rectas en el espacio de velocidades. Supongamos que A, B, C son tres puntos del espacio de velocidades que representan las velocidades de las partículas A, B y C las cuales efectúan un movimiento uniforme y rectilíneo y que en un cierto momento del tiempo resultan en un mismo lugar. Demuéstrese que los puntos-$\mathcal{V}$ A, B y C se hallan en una recta $\mathcal{V}$ si, y sólo si, cuando en cualquier sistema de referencia las partículas A, B y C se hallan en cada momento en una recta.

2. Aplicaciones proyectivas de un círculo sobre un círculo. Recordemos que la aplicación L del círculo K sobre el círculo K' se llama proyectiva, si cualquier cuerda PQ del primer círculo es transformada por ella en la cuerda $P'Q'$ del segundo ($P' = L(P)$, $Q' = L(Q)$). En la sección 4.2 utilizamos el hecho de que existen no más de dos aplicaciones proyectivas de un círculo sobre otro [1]), que transforman el centro y un punto dado del primer círculo en dos puntos dados del segundo. Mostremos el plan detallado de la demostración de esta afirmación. Los detalles son propuestos al lector para que los restablezca por sí mismo. Más adelante tendremos que analizar principalmente la aplicación del círculo sobre *sí mismo*; estas aplicaciones se llaman *transformaciones del círculo*.

1) Veamos las aplicaciones proyectivas del círculo K sobre el círculo K', que transforman los puntos A y B en A' y B'. Supongamos que L_0 es una de ellas; entonces cualquier aplicación L puede ser representada como el resultado de la realización (composición) consecutiva de la aplicación proyectiva Π del círculo K, que deja los puntos A y B inmóviles y de la aplicación L_0, o sea, $L = L_0 \circ \Pi$.

Indicación. La composición $L_0^{-1} \circ L$ es la transformación proyectiva del círculo K que deja los puntos A y B en su lugar.

En virtud de 1) es suficiente demostrar el siguiente teorema:

> (*existen exactamente dos transformaciones proyectivas del círculo K, que dejan en su lugar su centro A y un cierto punto B suyo (es decir, la transformación idéntica E y la simetría S respecto de la recta AB)*.

Supongamos que A es el centro del círculo, Π, la transformación proyectiva del círculo K tal, que $\Pi(A) = A$, X', la imagen de un punto arbitrario X, o sea, $X' = \Pi(X)$, Ω, la circunferencia de frontera del círculo K y $\widetilde{P}$, el punto de la circunferencia Ω, diametralmente opuesto a su punto P. Finalmente, con $\smile PQ$ denotaremos el arco de la circunferencia Ω con los extremos P y Q, además, concordaremos en analizar sólo los arcos que son *menores que las semicircunferencias*.

2) Las imágenes de dos puntos diametralmente opuestos serán para la transformación Π de nuevo diametralmente opuestos.

3) Si $X \in \smile PQ$, entonces $X' \in \smile P'Q'$.

Indicación. El punto X se halla en el arco PQ si, y sólo si las cuerdas PQ y $X\widetilde{P}$ se intersecan.

4) Supongamos que F es el punto medio del arco PQ de la circunferencia Ω, entonces F' es el punto medio del arco $P'Q'$.

Indicación. Señalemos que la cuerda $\widetilde{P}\widetilde{Q}$ es paralela a PQ. Veamos

---

[1]) Se hablaba de los mapas $\mathcal{V}$ relativistas K_A y K_B, pero ahora esto no tiene, para nosotros, importancia.

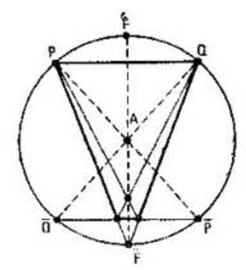




FIG. 4.23

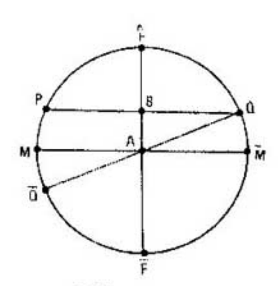


FIG. 4.24

el rapecio acotado por las rectas PQ, $\overline{PQ}$, $\overline{F}P$ y $\overline{F}Q$. De acuerdo al conocido teorema, la recta que une el punto de intersección de la prolongación de los lados laterales de un trapecio y el punto de intersección de sus diagonales, divide por la mitad su base. Por eso, el punto F del arco PQ es su punto medio si y sólo si, las diagonales del trapecio construido se intersecan en el diámetro $F\overline{F}$ (véase fig. 4.23). Esta última condición se cumple para P, Q y F, por lo tanto, en virutd de 2) y 3) también para P', Q' y F'.

5) Las cuerdas PQ y $P'Q'$ son paralelas si y sólo si, el punto medio F del arco PQ con la transformación Π queda inmóvil o pasa al punto diametralmente opuesto $\overline{F}$.

Utilicemos ahora la condición de inmovilidad del punto B, que hasta ahora no nos ha sido necesaria. Tracemos por el punto B el radio AF y la cuerda PQ perpendicular a él, y por el A el diámetro $M\overline{M}$ perpendicular a AF (fig. 4.24).

6) Con la transformación Π la cuerda PQ pasa a sí misma y los puntos F y $\overline{F}$ son inmóviles. Además, o bien $P' = P$ y $Q' = Q$, entonces $M' = M$, o bien $P' = Q$ y $Q' = P$, entonces $M' = \overline{M}$.

Indicación. Señalemos que F es el punto medio de $\cup PQ$, M es el punto medio de $\cup PQ$ y la cuerda PQ y el diámetro $F\overline{F}$ pasan a través del punto inmóvil B. Después de esto, queda sólo utilizar 5).

Así, son posibles dos casos: $P' = P$ (y $M' = M$) o $P' = Q \times$ $\times$ $(M' = \overline{M})$. Veamos el primero de ellos.

7) Todos los puntos de la circunferencia Ω quedan inmóviles durante la transformación Π.

Indicación. Los puntos F, M, $\overline{F}$ y $\overline{M}$ son inmóviles. Por lo tanto, son inmóviles, en virtud de 4), los puntos medios de los cuatro arcos con extremos en estos puntos. Análogamente, son inmóviles también los puntos medios de las mitades de estos cuatro arcos, y en general, todos los puntos $X \in \Omega$, para los cuales el ángulo XAF es igual a $n\pi/2^m$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$. La inmovilidad de los demás puntos resulta de 3).

8) La transformación Π (en el caso $P' = P$) es idéntica.

Indicación. Cualquier punto del círculo es una intersección de dos cuerdas y sus extremos son inmóviles.

9) Si $P' = Q$, Π es la simetría axial S.

Indicación. La aplicación proyectiva $\Pi_1 = S \circ \Pi$ deja en su lugar los puntos A, B, P y se pueden aplicar a ella las afirmaciones 7) y 8). A la vez $\Pi = S \circ \Pi_1$.

Fin de la demostración.

3. Medición de las distancias $\mathscr{V}^{\circ}$ en los mapas de velocidades. Supongamos que X e Y son los puntos del mapa-$\mathscr{V}^{\circ}K_A$ que representan los puntos-$\mathscr{V}^{\circ}X$ e Y, y supongamos que PQ es la cuerda del círculo K_A que los contiene, además el punto X está situado entre P e Y. Demostrar que.

$$\| XY \| = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|OX|}{|XP|} : \frac{|OY|}{|YP|} \right).$$

Indicación. Pásese al mapa-$\mathscr{V}^{\circ}K_X$ mediante la transformación L_{AX}. Utilícese el teorema de la transformación de las relaciones para la proyección central y la fórmula (4.11).

4. Desplazamientos $\mathscr{V}^{\circ}$. Al igual que en la geometría común, los desplazamientos del espacio relativista de velocidades (desplazamientos $\mathscr{V}^{\circ}$) se definen como sus transformaciones tales que al efectuarlas se conservan las distancias $\mathscr{V}^{\circ}$. A cualquier desplazamiento $\mathscr{V}^{\circ}$ se puede ser confrontada la transformación F_A del mapa K_A: si X es la imagen del punto-$\mathscr{V}^{\circ}X$ en este mapa, $F_A(X)$, por definición, es la imagen del punto-$\mathscr{V}^{\circ}X$ (X). Demuéstrense las siguientes propiedades de los desplazamientos-$\mathscr{V}^{\circ}$:

1) Para cualquier desplazamiento-$\mathscr{V}^{\circ}F$ la transformación F_A del círculo K_A es proyectiva. Al contrario, a cualquier transformación proyectiva del círculo K_A corresponde un cierto desplazamiento $\mathscr{V}^{\circ}$.

2) Existen exactamente dos desplazamientos $\mathscr{V}^{\circ}$ que transforman un rayo dado del espacio de velocidades en otro.

Indicación. Pásese al mapa de velocidades con centro en el origen de uno de los rayos. Utilícese el problema anterior, el suplemento 2 y los resultados de la sección 4.2. En la geometría euclidiana, esta afirmación es considerada en ocasiones como un axioma («axioma de la movilidad del plano»).

3) Dos pares cualquiera de rectas $\mathscr{V}^{\circ}$ paralelas (en el sentido de Lobachevski) son «iguales», o sea, se les puede hacer coincidir mediante un desplazamiento $\mathscr{V}^{\circ}$.

5. Simetría central. El ejemplo más sencillo de un desplazamiento $\mathscr{V}^{\circ}$ es la simetría central con el centro O, o un giro de 180° del espacio $\mathscr{V}^{\circ}$ alrededor del punto O. La correspondiente transformación del mapa K_O es la simetría central común (euclidiana) respecto del centro del mapa. Pasando del mapa K_O al mapa arbitrario K_A mediante la aplicación L_{OA} obtenemos que

1) los pares de puntos P y P', Q y Q', R y R', X y X' en la fig. 4.25 sirven de imágenes, en el mapa K_A, de los pares de puntos $\mathscr{V}^{\circ}$, simétricos centrales respecto de O (demuéstrese). De aquí resulta la regla para la construcción, en el mapa $\mathscr{V}^{\circ}$, de la imagen de cualquier punto al efectuar una simetría central («no euclidiana») con el centro dado. ¿En qué consiste la misma?

2) Demostrar que si en la fig. 4.25 $|OR| = |OR'|$, entonces también $|OX| = |OX'|$ («teorema de la mariposa»).

3) Demostrar que cualquier par de rectas $\mathscr{V}^{\circ}$ divergentes a y b tiene un centro de simetría O único y una perpendicular común única,

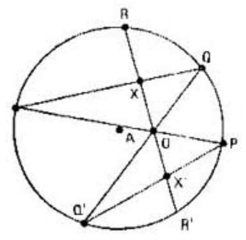


FIG. 4.25

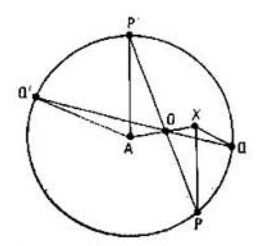


FIG. 4.26

además el punto O es el punto medio de esta perpendicular. ¿Cómo construir la imagen de la perpendicular común en el mapa $\mathcal{V}^o$?

6. **Medición de los ángulos $\mathcal{V}^o$ en los mapas de velocidades.** Supongamos que en el mapa K_A está dada la imagen PXQ del ángulo-$\mathcal{V}^o$ PXQ (P y Q son puntos del absoluto). Se requiere hallar su magnitud $\mathcal{V}^o$. Si el vértice del ángulo PXQ coincide con el centro del mapa, la magnitud $\mathcal{V}^o$ del ángulo PXQ es igual a la magnitud euclidiana del ángulo PXQ. En caso contrario es suficiente construir en el mapa la imagen del ángulo $P'AQ'$, igual (según su magnitud $\mathcal{V}^o$) al ángulo PXQ, por ejemplo, simétrico al ángulo PXQ respecto del punto medio O del segmento AX (fig. 4.26). Nosotros sabemos realizar estaconstrucción, si se da la imagen del centro de simetría O. En los siguientes dos problemas se explica como construir el punto O.

1) Levantamos las perpendiculares al segmento AX (en el mapa K_A) desde sus extremos a ambos lados de él. Demuéstrese que la cuerda que une los puntos de intersección de las perpendiculares con el absoluto pasa a través del punto O.

2) Trazamos a través del punto X la cuerda PR. Demuéstrese que el punto O está situado en el arco de la circunferencia que interseca el absoluto Ω_A en los puntos P y R con un ángulo recto [1]) (fig. 4.27).

Indicación. Para una simetría central respecto de O, la recta PR se transforma en la recta $\mathcal{V}^o$, que en el mapa K_A se representa por el diámetro $P'R'$. Utilizando esto, hállese la magnitud (euclidiana) del ángulo POR.

Pero se puede hallar la magnitud $\mathcal{V}^o$ del ángulo PXQ sin acudir a la simetría central.

3) Demuéstrese que la tangente *la* arco POR en el punto O es paralela al diámetro $P'R'$ (fig. 4.27).

4) Veamos dos cuerdas que se intersecan PR y QS en el mapa $\mathcal{V}^o$ y construyamos los arcos POR y QOS, perpendiculares al absoluto (fig. 4.28). Demuéstrese que la magnitud $\mathcal{V}^o$ del ángulo entre las rectas-$\mathcal{V}^o$ PR y QS es igual a la magnitud euclidiana del ángulo entre los arcos.

---

[1]) El ángulo entre los arcos es igual, por definición, a la magnitud del ángulo entre las tangentes a ellos en el punto de su intersección.

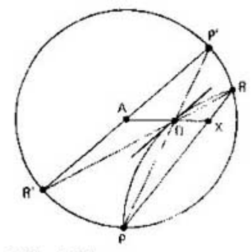


FIG. 4.27

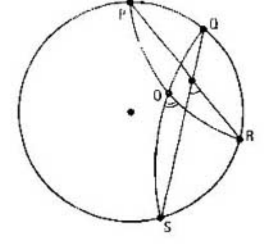


FIG. 4.28

7. Mapas isogonales del espacio de velocidades relativista. A cada punto X del espacio de velocidades, en el mapa-$\mathscr{V}$ K_A le corresponde un punto determinado X. Cotejemos el punto X con el nuevo punto x del círculo K_A, o sea, un punto que representa, en el mapa K_A, el punto medio del segmento-$\mathscr{V}$ AX. Con otras palabras, hagamos así como que realizamos la homotecia $\mathscr{V}$ con un coeficiente de 1/2 del mapa K_A. Obtenemos un nuevo mapa P_A, o más exactamente, lo nuevo será la correspondencia entre los puntos $\mathscr{V}$ y los puntos del mapa, mientras que el mismo seguirá siendo un círculo de radio 1. Del suplemento anterior resulta que las rectas $\mathscr{V}$ se

los ángulos deben conservarse (utilícese el paso límite en el primer teorema de los cosenos, cuando las longitudes de los lados de un triángulo tienden a cero). Dedúzcase de aquí que el coeficiente k no puede diferenciarse de 1, o sea, F es un desplazamiento. Así pues, en la geometría de Lobachevski no sólo no hay triángulos semejantes, sino que en general no existe el concepto de semejanza.

Capítulo 5
CINEMÁTICA RELATIVISTA

El resultado fundamental de los capítulos anteriores se expresa en unas cuantas fórmulas, o sea, en las fórmulas de la trigonometría para el plano de Lobachevski, y en una frase: el espacio relativista de velocidades posee la geometría de Lobachevski. Con este, aunque no muy grande, pero sí valioso equipaje se puede seguir adelante. Pero no nos apresuremos. Ahora es el momento justo de detenerse y desde la altura de nuestros conocimientos ver el camino recorrido. No vamos a introducir nuevos conceptos, sin embargo, si antes al investigar la estructura geométrica del espacio de velocidades, con más frecuencia íbamos de los razonamientos físicos a las deducciones geométricas, en este capítulo probaremos demostrar como trabaja la relación inversa. Con ayuda de las fórmulas ya conocidas de la geometría de Lobachevski, deduciremos de nuevo la dependencia entre la magnitud de la velocidad y la distancia en el espacio de velocidades, la regla de la composición de las velocidades y calcularemos algunos efectos físicos interesantes. Para comodidad juntaremos todas las fórmulas geométricas que no servirán en lo posterior.

5.1. COMO "RESOLVER LOS TRIÁNGULOS" EN EL PLANO DE LOBACHEVSKI

En los tres espacios de curvatura constante[1]), o sea, en el plano euclidiano (curvatura nula), en la esfera (curvatura positiva) y en el plano de Lobachevski (curvatura negativa), actúan fórmulas parecidas que expresan unos elementos del

[1]) Véase la sección 3.7.

triángulo a través de otros. Particularmente son parecidas, una a otra, las fórmulas de la geometría esférica y de la geometría de Lobachevski: estas últimas se obtienen de las primeras mediante la sustitución de las funciones trigonométricas de las distancias esféricas «angulares» (sen x, cos x, tg x) por las correspondientes funciones hiperbólicas de las distancias en el plano de Lobachevski (sh x, ch x, th x) y en algunas partes, cambiando el signo. Escribamos unas y otras fórmulas paralelamente, a la izquierda, las funciones trigonométricas y los triángulos esféricos, a la derecha, las funciones hiperbólicas y «los triángulos de Lobachevski». Comenzaremos por las definiciones y las relaciones fundamentales para las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Definiciones[1]

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$	$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$	(5.1)
$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$	$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$	(5.2)
$\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x/\cos x$	$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x/\operatorname{ch} x.$	(5.3)

Relaciones fundamentales

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$	$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$	(5.4)
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$	(5.5)
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$	(5.6)
$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$	$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$	(5.7)

[1]) En estas definiciones $i = \sqrt{-1}$, o sea, es la llamada «unidad imaginaria». El lector que no conozca los números complejos, puede considerar esto como una notación puramente formal. Recomendamos verificar, sin embargo, que al utilizar las expresiones e^{ix} como exponentes comunes ($e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy}$) y al sustituir, donde es necesario, i^2 por -1, podemos obtener todas las fórmulas trigonométricas estándar del mismo modo como de las definiciones (5.1) y (5.2) se deducen las fórmulas (5.4)...(5.6) y las semejantes a ellas. Véase el apéndice.

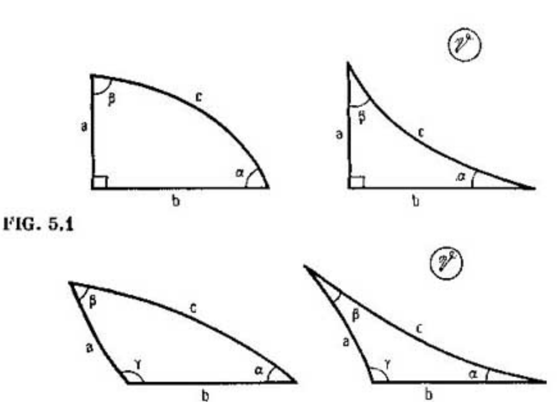


FIG. 5.1

FIG. 5.2

Comportamiento con argumentos pequeños $x \ll 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
\operatorname{sen} x \approx x & \operatorname{sh} x \approx x \\
\cos x \approx 1 - x^2/2 & \operatorname{ch} x \approx 1 + x^2/2 \\
\operatorname{tg} x \approx x & \operatorname{th} x \approx x
\end{array}
\qquad (5.8)
$$

Los gráficos de las funciones hiperbólicas se pueden ver en la fig. 4.9; en el Apéndice se examinan con detalle sus definiciones y propiedades.

Ahora mostraremos las relaciones métricas entre los lados y los ángulos de los triángulos en las dos geometrías. Desde luego, entre ellos, los fundamentales son los teoremas de los cosenos y de los senos. Las demás fórmulas son sus casos particulares. Utilizando las aproximaciones (5.8), es fácil comprobar, que para las distancias pequeñas, las fórmulas de la izquierda y de la derecha se transforman en las bien conocidas fórmulas de la planimetría euclidiana.

Trigonometría del triángulo rectángulo (las notaciones son evidentes de la fig. 5.1)

$$
\begin{array}{l|ll}
\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos\alpha & \operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha & (5.9) \\
\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} c \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \operatorname{sen}\alpha & (5.10) \\
\operatorname{tg} a = \operatorname{sen} b \operatorname{tg}\alpha & \operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha & (5.11) \\
\cos c = \cos a \cos b & \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b & (5.12) \\
\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta & \operatorname{ch} c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta & (5.13) \\
\cos a = \cos\alpha / \operatorname{sen}\beta & \operatorname{ch} a = \cos\alpha / \operatorname{sen}\beta. & (5.14)
\end{array}
$$

Trigonometría de un triángulo arbitrario (las notaciones son evidentes de la fig. 5.2)

Primer teorema de los cosenos

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma \quad \Big| \quad \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma. \tag{5.15}$$

Segundo teorema de los cosenos

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \quad \Big| \quad \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \operatorname{ch} c. \tag{5.16}$$

Teorema de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \gamma} \quad \Big| \quad \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\operatorname{sen} \gamma}. \tag{5.17}$$

5.2. UNA DEDUCCIÓN MÁS DE LA FÓRMULA DE LA RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD Y LA DISTANCIA $\mathcal{F}$

Esta fórmula la obtuvimos en la sección 4.4:

$$v_{A|B} = \operatorname{th} \| AB \|, \tag{5.18}$$

pero dejándonos guiar por el principio «la repetición es madre del aprendizaje» la deduciremos de nuevo con otro método. En el capítulo 4, primero hallamos el aspecto de la fórmula de relación y después, mediante ella obtuvimos las relaciones métricas (5.9)...(5.17) para el espacio de velocidades relativista. Ahora el orden será el inverso. Trataremos de demostrar la igualdad (5.18), partiendo de que en el espacio de velocidades son válidas las relaciones (5.9)...(5.17) de la geometría de Lobachevski (en realidad con la fórmula (5.9) es suficiente).

Escribamos la dependencia entre la velocidad relativa de dos sistemas de referencia A y B y la distancia[1]) entre los correspondientes

[1]) En la literatura inglesa para la velocidad $v_{A|B}$ y la distancia $\|AB\|$, en el espacio de velocidades, se utilizan dos términos: «*velocity*» y «*rapidity*». En nuestro libro preferimos, en lugar de este último, el término geométrico «distancia»

pondientes puntos en el espacio de velocidades en forma general:

$$v_{A|B} = F\,(\|\,AB\,\|).$$

Para hallar la función F veamos el movimiento de una cierta partícula B, desde el punto de vista de dos observadores inerciales A y C. Supongamos que la partícula B (fig. 5.3) se mueve del origen del sistema de coordenadas Axy, del punto A, con velocidad constante v, y su dirección de movimiento forma un ángulo α con el eje de coordanadas Ax. Al cabo de un tiempo t después del inicio del movimiento la partícula resulta en el punto con coordenadas $x = v \cos \alpha \cdot t$, $y = v \operatorname{sen} \alpha \cdot t$. Supongamos que otro sistema de referencia $Cx'y'$ se mueve a lo largo del eje Ax con velocidad $v \cos \alpha$, además, en el momento inicial del tiempo los ejes de coordenadas $Cx'y'$ coinciden con los ejes Axy. En el tiempo t el sistema $Cx'y'$ recorrerá, a lo largo del eje Ax, una distancia igual a $v \cos \alpha \cdot t$. Las coordenadas de los puntos B y C respecto al eje Ax en cualquier momento son idénticas, por eso, desde el punto de vista del observador A la partícula B se encuentra constantemente en la recta Cy'. ¡Pero lo mismo ve también el observador C! Por lo tanto, los vectores de las velocidades del sistema A y la partícula B, medidos por el observador C, serán *perpendiculares*. Veamos ahora qué aspecto tendrá todo esto en el espacio de velocidades (fig. 5.4). Los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ representan las velocidades de los observadores A, C y de la partícula B. Los mismos forman un triángulo con lados, que nosotros denotamos con a, b, c. La longitud c del segmento $\boldsymbol{AB}$ determina la velocidad relativa de la partícula B y del observador A:

$$v = F\,(c). \tag{5.19}$$

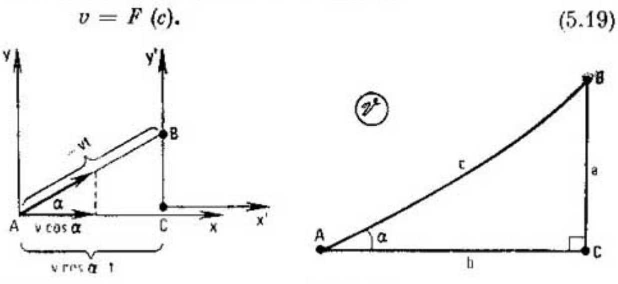


FIG. 5.3 **FIG. 5.4**

Análogamente, la longitud b del segmento AC determina la velocidad relativa de los observadores A y C:

$$v \cos \alpha = F(b). \tag{5.20}$$

El ángulo $\widehat{CAB}$ de nuestro triángulo es igual al ángulo α entre los vectores de las velocidades de la partícula B y el observador C respecto del observador A. Pero el ángulo $\widehat{BCA}$ es recto, ya que para el observador C los vectores de las velocidades $v_{A|C}$ y $v_{B|C}$ son perpendiculares entre sí. Aquí vemos, que al caso que examinamos en el espacio de de velocidades corresponde un triángulo rectángulo. Escribamos la fórmula (5.9) que relaciona en la trigonometría de Lobachevski su hipotenusa, el cateto y el ángulo entre ellos:

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos \alpha. \tag{5.21}$$

Por otro lado de las relaciones (5.19)...(5.20) se deduce la igualdad

$$F(b) = F(c) \cos \alpha. \tag{5.22}$$

Dividamos ahora (5.22) entre (5.21); el $\cos \alpha$ se elimina y obtenemos que

$$F(b)/\operatorname{th} b = F(c)/\operatorname{th} c. \tag{5.23}$$

Al variar el ángulo α podemos variar c con b invariable con ello la igualdad (5.23) no debe violarse. Esto es posible sólo cuando la relación $F(c)/\operatorname{th} c$ es igual a una cierta constante k que no depende ni de b ni de α:

$$F(c)/\operatorname{th} c = F(b)/\operatorname{th} b = k.$$

Así, llegamos a la conclusión de que la velocidad relativa de cualesquiera dos sistemas de referencia A y C debe ser proporcional a la tangente hiperbólica de la distancia $\| AC \|$ entre los puntos A y C en el espacio de velocidades:

$$v_{A|C} = k \operatorname{th} \| AC \|.$$

Pero ¿a qué es igual la constante k? Recordemos que nosotros utilizamos el sistema de unidades, en el que la velocidad máxima posible, la velocidad de la luz, numéricamente es igual a 1. En el espacio de velocidades la misma se representa por puntos infinitamente alejados, por pun-

tos del absoluto. Si la velocidad $v_{A|C}$ tiende a la velocidad de la luz, la distancia-$\mathcal{V}$ $\| AC \|$ tiende al infinito. Pasando al límite obtenemos

$$v_{\text{luz}} = k \operatorname{th} (\infty) = 1,$$

donde $\operatorname{th} (\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{th} x = 1$. Por eso, en nuestro sistema de unidades $k = 1$.

Hemos deducido de nuevo una fórmula muy importante de nuestra teoría:

$$v_{A|C} = \operatorname{th} \| AC \|,$$

o sea, la velocidad relativa $v_{A|C}$ de los observadores inerciales A y C, medida en unidades de la velocidad de la luz, es igual a la tangente hiperbólica de la distancia $\| AC \|$ entre los puntos A y C en el espacio de velocidades.

Si el espacio de velocidades tuviera no la geometría de Lobachevski, sino la de Euclides, entonces la relación $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos \alpha$ para el triángulo rectángulo ABC en el plano de Lobachevski tendríamos que sustituirla por la correspondiente fórmula euclidiana, que relaciona la hipotenusa, el cateto y el ángulo entre ellos: $b = c \cos \alpha$. Dividiendo entre ella la igualdad obtenida $F(b) = F(c) \cos \alpha$, observaríamos que

$$\frac{F(b)}{b} = \frac{F(c)}{c} = k'.$$

Por eso, en el caso de la geometría euclidiana del espacio de velocidades, la velocidad relativa está obligada a ser proporcional a la distancia

$$v_{A|C} = k' \mid AC \mid.$$

Y como la distancia entre los puntos del plano puede ser tan grande como se quiera, la velocidad también, en este caso, puede ser tan grande como se quiera.

En el caso de la geometría euclidiana del espacio de velocidades, los objetos físicos pueden moverse con una velocidad cualquiera tan grande como se quiera.

Ya podemos poner los puntos sobre las íes en el razonamiento señalado al final del capítulo 3. Ahí, en la sección 3.6, dedujimos directamente del principio de relatividad, que el espacio de velocidades es infaliblemente un espacio bidimensional de curvatura constante. El caso de curvatura

positiva, la esfera, fue rechazado por simples razones cualitativas. Nos acabamos de convencer de que el caso de curvatura nula, el plano euclidiano, corresponde a la mecánica no relativista. Queda una tercera variante: el espacio de velocidades relativista tiene curvatura constante *negativa*. Partiendo sólo de esto, con métodos puramente matemáticos (esencialmente no elementales) se puede investigar a fondo su geometría y, desde luego, obtener todas las fórmulas (5.9)...(5.17) y después, como hemos mostrado, también la fórmula de relación (5.18).

5.3. LEY RELATIVISTA DE LA COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

El problema fundamental de la cinemática relativista puede ser planteado del siguiente modo. Supongamos que en el sistema inercial de referencia A están dadas las velocidades $v_{X|A}$ de unos ciertos cuerpos X. Se requiere hallar la velocidad de estos cuerpos en otro sistema inercial B, que se mueve respecto de A. Este problema se puede resolver de dos formas diferentes. El primer método consiste en trazar las velocidades conocidas $v_{X|A}$ en el mapa de velocidades K_A del observador A, después realizar la transformación, descrita en el capítulo 4, del mapa K_A al mapa de velocidades K_B, que se reduce a la proyección central, y «quitar» del mapa K_B los valores nuevos de las velocidades. Pero utilizar directamente este método no es muy cómodo, pues es demasiado voluminoso o inexacto: de los datos numéricos al dibujo, después, a través de las construcciones geométricas, a otro dibujo y de nuevo a los datos numéricos. Es más atractivo el otro método, el llamado «analítico-geométrico». De las velocidades $v_{X|A}$, $v_{B|A}$ dadas, es necesario pasar directamente al espacio de velocidades relativista $\mathscr{V}$, donde les corresponderán los puntos $A, B, \ldots, X$, las distancias $\mathscr{V}$ entre los cuales están relacionados con las magnitudes de las velocidades mediante las relaciones $v_{X|A} = \operatorname{th} \| XA \|$.

Para colocarnos en el punto de vista del observador inercial B, es suficiente unir los puntos X con el punto B mediante las rectas $\mathscr{V}$ y resolver el problema puramente geométrico de hallar las longitudes y los ángulos desconocidos con ayuda de los teoremas de los cosenos, de los senos o de

otras fórmulas de la geometría de Lobachevski, mostradas en la sección 5.1. Después de esto, con ayuda de las mismas relaciones $v_{X|B} = \text{th} \| XB \|$ se puede regresar del espacio $\mathscr{V}$ directamente a las velocidades, pero medidas ¡ya por un observador arbitrario B!

Ilustraremos este método con algunos ejemplos. Veamos otra vez el problema cinemático más sencillo, o sea, el problema sobre el movimiento de tres observadores a lo largo de una recta (véase la sección 4.3). Supongamos que desde la Tierra **T** es lanzada una nave espacial **N**. Cuando ésta coge impulso hasta una velocidad v_1 cercana a la de la luz, desde ella se lanza, en la misma dirección, un cohete de exploración pequeño **C**. Su velocidad respecto de la nave es igual a v_2. ¿Con qué velocidad se moverá el cohete en relación con la Tierra?

Pasemos al espacio de velocidades. Los puntos correspondientes **T**, **N**, **C** estarán situados en una recta $\mathscr{V}$. La distancia $\| \mathrm{TN} \| = a_1$ se determina por la velocidad de la nave en relación con la Tierra: $v_1 = \text{th}\, a_1$, y la distancia entre los puntos **N** y **C**, $\| \mathbf{NC} \| = a_2$ es la velocidad del cohete respecto de la nave $v_2 = \text{th}\, a_2$. La velocidad del cohete respecto de la Tierra se determina por la distancia $\| \mathbf{CT} \| = a$. La parte geométrica del problema es bastante sencilla, la misma se reduce a la afirmación de que la longitud del segmento TC es igual a la suma de las longitudes de los segmentos **TN** y **NC**:

$$a = a_1 + a_2,$$

en el caso relativista se suman no las velocidades, sino las distancias en el espacio de velocidades. Ahora podemos regresar a las velocidades medidas: desde el punto de vista del observador en la Tierra, el cohete se moverá con una velosidad

$$v = \text{th}\, a = \text{th}\, (a_1 + a_2).$$

Queda recordar cómo se expresa la tangente hiperbólica de la suma a través de las tangentes hiperbólicas de los sumandos (fórmula (5.7))

$$v = \text{th}\, (a_1 + a_2) = \frac{\text{th}\, a_1 + \text{th}\, a_2}{1 + \text{th}\, a_1\, \text{th}\, a_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}.$$

Esta es la fórmula relativista de composición de las velocidades conocida ya por nosotros. Desde luego, para velo-

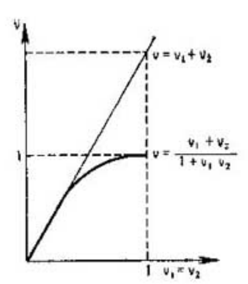


FIG. 5.5

cidades pequeñas, mucho menores que la velocidad de la luz, cuando v_1, $v_2 \ll 1$, ésta se transforma en la fórmula no relativista de la composición de velocidades $v = v_1 + v_2$. Es útil valorar cuándo estas fórmulas comienzan a diferenciarse, considerablemente, una de otra. En la fig. 5.5 se muestran los gráficos de la dependencia de la velocidad resultante v, calculada según las fórmulas relativista y no relativista en el caso de sumandos iguales $v_1 = v_2$. Se ve que ambas leyes de adición de velocidades proporcionan resultados idénticos, para velocidades que no superan 0,2...0,4 de la velocidad de la luz. Los cohetes espaciales modernos tienen velocidades del orden de 10^{-4} de la velocidad de la luz. Al parecer, nuestro problema para los cohetes tendrá un valor práctico todavía no muy pronto.

En el siguiente ejemplo veremos la composición de velocidades dirigidas bajo un ángulo una respecto de otra[1]).

Supongamos que dos observadores B y C se mueven respecto de A con velocidades iguales en magnitud, además el ángulo entre los vectores $v_{B|A}$ y $v_{C|A}$ es igual a $\pi/3$. En la cinemática no relativista los tres puntos-$\mathcal{T}$ A, B, C serían los vértices del triángulo regular en el espacio de velocidades, y para el observador B las velocidades de los otros dos observadores serían también iguales y estarían dirigidas bajo un ángulo de $\pi/3$ una respecto de otra. En la teoría de la rela-

---

[1]) El término «composición de velocidades» es más conveniente para la cinemática no relativista, donde las velocidades, en efecto, se suman según la regla del paralelogramo: $v_{C|A} = v_{B|A} + v_{C|B}$. En el caso relativista es más correcto hablar de la «transformación» de las velocidades al pasar a otro sistema de referencia.

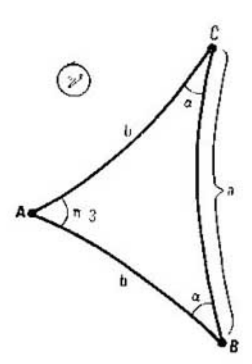


FIG. 5.6

tividad esto ya no es así. Veamos el cuadro correspondiente en el espacio de velocidades (fig. 5.6). Los tres puntos *A*, *B*, *C* son los vértices del triángulo isósceles con lados $\| AB \| = \| AC \| = b$ y un ángulo en el vértice *A* igual a $\pi/3$, además $v_{B|A} = v_{C|A} = v = \operatorname{th} b$. Para el observador *B*, los vectores de las velocidades $v_{A|B}$ y $v_{C|B}$ se determinarán por las longitudes de los lados $\| BA \| = b$ y $\| BC \| = a$ del triángulo *BAC* y por el ángulo α entre ellos.

Surge el problema geométrico: hallar la base y el ángulo de la base del triángulo isósceles conociendo los lados laterales y el ángulo del vértice. La base $a = \| BC \|$ de nuestro triángulo se halla según el teorema de los cosenos (5.15):

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} b \cos \frac{\pi}{3} =$$

$$= \operatorname{ch}^2 b - \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 b = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sh}^2 b \qquad (5.24)$$

(aquí utilizamos la identidad fundamental para las funciones hiperbólicas (5.4)). Para calcular el ángulo $\alpha = \widehat{ABC}$, escribamos el segundo teorema de los cosenos (5.16):

$$\cos \hat{B} = \cos \alpha = -\cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{ch} b =$$

$$= -\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{ch} b.$$

(No está de más subrayar que también en la geometría de Lobachevski los ángulos de la base de un triángulo isósceles

son iguales, ¡demuéstrelo!). Así pues, el ángulo α entre los vectores de las velocidades de los observadores A y C, respecto del observador B, se determinan por la fórmula

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ch} b}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 b}},$$

o a través de la velocidad $v_{A|B} = v = \operatorname{th} b$:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

En el caso relativista será menor que $\pi/3$, ya que $\operatorname{ch} b > 1$ y, por lo tanto, $\operatorname{ctg}\alpha > \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$. Si la velocidad $v_{B|A} = v$ tiende a la velocidad de la luz $c = 1$ (límite ultrarrelativista), α tenderá a cero, o sea, las rectas AB y BC se transforman en rectas, paralelas en el sentido de Lobachevski, que se intersecan con un ángulo nulo en el punto B infinitamente alejado y situado en el absoluto del espacio $\mathcal{V}$. En la fig. 5.7 está representada la dependencia entre el ángulo α y la magnitud de la velocidad $v_{B|A} = v$. Aquí vemos que en el caso relativista el ángulo entre los vectores de las velocidades $v_{A|B}$ y $v_{C|B}$ comienza a diferenciarse, notoriamente, de su valor no relativista $\pi/3$ sólo cuando $v \approx 0{,}4$. Cuando $v < 0{,}2$ esta diferencia no supera ni el uno por ciento.

La velocidad del observador C respecto del observador B es igual a la tangente hiperbólica de la distancia, conocida de (5.24), entre los puntos B y C en el espacio de velocidades relativista: $v_{C|B} = \operatorname{th} a$, donde $\operatorname{ch} a = 1 + (\operatorname{sh}^2 b)/2$, y $\operatorname{th} b = v$. Haciendo cálculos sencillos se puede expresar $v_{C|B}$ a través de $v_{B|A} = v$:

$$v_{C|B} = v\frac{\sqrt{4-3v^2}}{2-v^2}.$$

El gráfico de esta dependencia se muestra en la fig. 5.8. Para velocidades pequeñas v, este gráfico prácticamente no se diferencia de la recta $v_{C|B} = v$, si la velocidad v tiende a la velocidad de la luz, o sea, a la unidad, también $v_{C|B}$, desde luego, tiende a la unidad, además, en ninguna parte la diferencia entre el resultado relativista y el no relativista supera el 5% de la velocidad de la luz.

Se puede señalar (y esto se ve de los ejemplos estudiados), que el error de la composición «newtoniana» de las veloci-

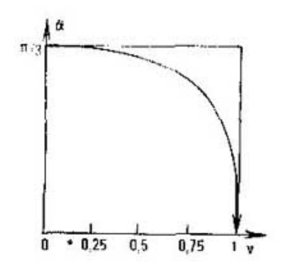


FIG. 5.7

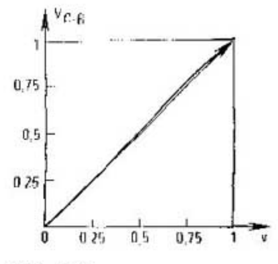


FIG. 5.8

dades (según la regla del paralelogramo) no supera el 1% hasta velocidades del orden de 0,2...0,4 de la velocidad de la luz. Aquí, las correcciones relativistas, según el orden de magnitud, son iguales al producto de las velocidades sumadas. Las diferencias considerables entre las teorías relativista y no relativista comienzan a aparecer sólo cuando las velocidades son aproximadamente mayores que la mitad de la velocidad de la luz.

5.4. ABERRACIÓN DE LA LUZ DE LAS ESTRELLAS

Veamos otro ejemplo útil. Supongamos que en el sistema de referencia C la partícula A se mueve a lo largo del eje y con velocidad v_A, y el observador B, a lo largo del eje x con velocidad v_B. Determinemos la magnitud y la dirección de la velocidad de la partícula respecto al observador. Dibujemos en el espacio de velocidades el cuadro que corresponde a nuestro problema (fig. 5.9). El punto C representa

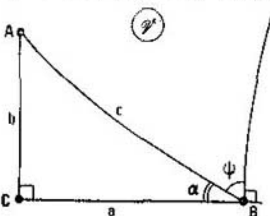


FIG. 5.9

la velocidad del sistema original de referencia, el punto B, la velocidad del observador, A, la velocidad de la partícula. El triángulo ABC es rectangular con un ángulo recto en el vértice C y sus catetos determinan las correspondientes velocidades: $v_A = \text{th}\, b$, $v_B = \text{th}\, a$. La magnitud de la velocidad de la partícula respecto al observador B se determina por la hipotenusa c: $v_{C|B} = \text{th}\, c$, y la dirección, por el ángulo $\alpha = \hat{B}$ del triángulo ABC.

Ahora es necesario de nuevo resolver un problema puramente geométrico: por los catetos dados a y b del triángulo $\mathscr{T}$ rectángulo, hallar su hipotenusa c y el ángulo α. Demos un vistazo a la lista de fórmulas: nos sirven el teorema de Pitágoras (5.12) y la relación (5.11) que relaciona dos catetos y un ángulo agudo del triángulo rectángulo ABC: $\text{ch}\, c = \text{ch}\, a\, \text{ch}\, b$; $\text{th}\, b = \text{sh}\, a\, \text{tg}\, \alpha$.

¡Listo! El problema está resuelto. Es necesario únicamente escribir de nuevo la respuesta a través de las velocidades v_A y v_B. Para eso, todas las funciones hiperbólicas serán expresadas a través de la tangente hiperbólica:

$$\text{sh}\, x = \frac{\text{th}\, x}{\sqrt{1-\text{th}^2 x}}; \quad \text{ch}\, x = \frac{1}{\sqrt{1-\text{th}^2 x}}$$

y sustituimos las tangentes por las velocidades correspondientes. Después de estas transformaciones sencillas obtenemos que

$$v_{A|B}^2 = v_A^2 + v_B^2 - v_A^2 v_B^2, \quad \text{tg}\, \alpha = \frac{v_A}{v_B} \sqrt{1 - v_B^2}. \quad (5.25)$$

En el límite no relativista de velocidades pequeñas, en la primera fórmula se puede despreciar el producto $v_A^2 v_B^2$ en comparación con los demás términos, y en la segunda, la magnitud v_B^2 en comparación con la unidad. El resultado se puede predecir fácilmente, esto es, desde luego, las fórmulas no relativistas comunes

$$v_{A|B}^2 = v_A^2 + v_B^2, \quad \text{tg}\, \alpha = \frac{v_A}{v_B}.$$

Mucho más interesante es el otro caso límite. Supongamos que la velocidad de la partícula A aumenta, aproximándose, en magnitud, a la velocidad de la luz: $v_A \to 1$. En el espacio de velocidades el punto A, con ello, se aleja al absoluto, y las rectas CA y BA se vuelven paralelas en el

9-01123

sentido de Lobachevski. Sustituyendo en (5.25) $v_A = 1$, hallamos que

$$v_{A|B}^2 = v_B^2 + 1 - v_B^2 = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{v_B^2} - 1}.$$

La primera relación es trivial, la velocidad de la partícula A que se mueve con la velocidad de la luz en relación con el sistema C, debe ser igual a la unidad también para el observador B. La segunda puede ser transformada mediante las fórmulas de la geometría común: recordemos que $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1}$, y obtenemos la bella (y ya conocida, véase (4.30)) fórmula

$$\cos\alpha = v_B = \operatorname{th} a. \tag{5.26}$$

Desde el punto de vista de la geometría, α es *el ángulo de paralelismo* de Lobachevski (el ángulo entre la recta BA y la perpendicular BC a la recta CA, paralela a ella en el sentido de Lobachevski; véase la sección 4.7). Este está relacionado directamente con un efecto físico real, con la aberración de la luz de las estrellas.

¿Qué es esto? Al medir los ángulos bajo los cuales se ven desde la Tierra las estrellas lejanas, se puede notar que en el transcurso de un año los mismos varían un poco. Explicar esto es sencillo. Supongamos que en el verano el observador ve la estrella justamente bajo un ángulo de 90° con relación a la dirección del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Después de medio año la dirección de la velocidad de movimiento de la Tierra varía a la opuesta. Como la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en el sistema de unidades común $v_{\text{Tierra}} \approx 30$ km/s $\approx 10^{-4}\, c$, las velocidades de «verano» y de «invierno» de la Tierra se representan en el espacio de velocidades por los puntos C y B, situados a la distancia-$\mathscr{V}$ a, tal que $\operatorname{th} a = v = 2 \cdot 10^{-4}$. Supongamos que el punto-$\mathscr{V}$ A, situado en el absoluto representa la velocidad de los fotones que vuelan desde la estrella observada hasta la Tierra (fig. 5.10). En verano el vector de esta velocidad forma con la dirección del movimiento de la Tierra un ángulo de 90°, por eso, el ángulo del vértice C del triángulo ABC en el espacio $\mathscr{V}$ es recto. En invierno la estrella se ve bajo un ángulo α con la misma dirección, igual, evidentemente, al ángulo del vértice B del triángulo ABC. La variación

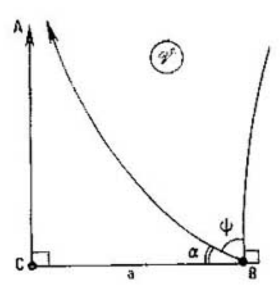


FIG. 5.10

$\psi = 90° - \alpha$ de la coordenada angular de la estrella en medio año se halla según la fórmula (5.26).

$$\text{sen}\,\psi = \cos\alpha = v.$$

En el fenómeno mismo de la aberración no hay nada específicamente relativista. Cada uno de nosotros ha podido ver como las huellas de las gotas de lluvia en los vidrios laterales de un automóvil se separan de la vertical, en cuanto éste comienza a moverse. En la cinemática clásica el ángulo de inclinación ψ se determina de la evidente igualdad $\text{tg}\,\psi = v_{\text{automóvil}}/v_{\text{gota}}$ (si no hay viento). Análogamente, la aberración de la luz de las estrellas se describe en la teoría clásica por la ley $\text{tg}\,\psi = v$. Cuando $v = 2v_{\text{Tierra}}/c = 2\cdot10^{-4}$ el valor del ángulo de aberración obtenido de aquí es tan pequeño, que en los límites de la exactitud de las mediciones alcanzada no se diferencia del relativista ($\text{sen}\,\psi = v$). Por eso, los resultados de los experimentos de medición de la aberración de la luz de las estrellas con igual exactitud se describen por la teoría clásica y por la teoría de la relatividad. Pero no vale la pena pensar que así siempre ocurre en todos los casos de importancia práctica. Los objetos macroscópicos del sistema solar, naturales y artificiales, tienen velocidades demasiado pequeñas, como para que mediante ellos se pudieran notar los efectos relativistas. Otro es el asunto con los objetos del micromundo: las partículas elementales, que llegan a la Tierra con los rayos cósmicos o que se aceleran artificialmente hasta velocidades cercanas a la de la luz en los aceleradores. Aquí ya la cinemática relativista comienza a trabajar con toda su fuerza. Nosotros relataremos acerca de como ésta ayudó a describir el mesón π neutro.

5.5. DESCOMPOSICIÓN DE UN PIÓN NEUTRO EN DOS CUANTOS GAMMA

Al interactuar la sustancia de un blanco y de un haz de neutrones, que son lanzados de un acelerador, se forma un conjunto de diversas partículas, entre ellas los llamados mesones π o piones. Se conocen tres tipos de π mesones: de carga positiva (π^+), negativos (π^-) y eléctricamente neutros (π^0). Estos últimos viven poco y comúnmente se descomponen en dos fotones de energía grande, o sea, en dos cuantos γ. Precisamente éstos pueden ser registrados por contadores de radiación γ. El mesón π^0 mismo permanece invisible, ya que su carga eléctrica es igual a cero, no entra en las interacciones eléctricas con los átomos y no deja huellas ni en las fotoemulsiones ni en las cámaras de burbujas o en la cámara de Wilson.

Veamos cuál es el aspecto de la descomposición de un mesón π^0 en dos sistemas de referencia diferentes, en el sistema A de laboratorio, donde el contador de cuantos γ permanece inmóvil y en el sistema donde el mesón π^0 permanece inmóvil, o sea, el sistema de referencia B. En el sistema de reposo dos cuantos γ, γ_1 y γ_2, se separan con la velocidad de la luz en direcciones contrarias. Por eso, en el espacio de velocidades los puntos γ_1 y γ_2 están en el absoluto y al mismo tiempo en una recta $\mathscr{V}$ que pasa a través del punto B, que representa la velocidad del mesón π^0 (fig. 5.11). El punto A representa la velocidad del sistema de referencia del laboratorio, en el cual el pión descompuesto se movía con la velo-

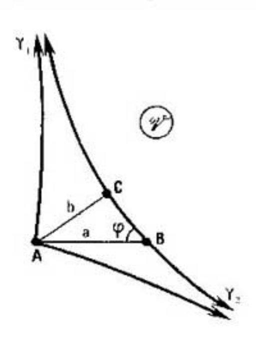


FIG. 5.11

cidad $v = \text{th}\, a$. Esclarezcamos ahora como estarán dirigidas las velocidades de los cuantos γ en el sistema de laboratorio A. Unimos en el espacio de velocidades el punto A con los puntos del absoluto γ_1 y γ_2 mediante las rectas $A\gamma_1$ y $A\gamma_2$. Estas rectas se intersecan con la recta $\gamma_1 B \gamma_2$ en el absoluto, o sea, son paralelas a ella en el sentido de Lobachevski. El ángulo entre ellas $\widehat{\gamma_1 A \gamma_2} = 2\alpha$, o sea, el ángulo entre la dirección de las velocidades de los cuantos γ en el sistema de referencia del laboratorio será igual al ángulo de paralelismo de Lobachevski duplicado. Tracemos del punto A a la recta $\gamma_1 B \gamma_2$ la perpendicular AC y denotemos su longitud a través de b. El ángulo de paralelismo de Lobachevski se determina por la longitud de esta perpendicular (véase (5.26)):

$$\cos\alpha = \text{th}\, b. \tag{5.27}$$

Veamos el ángulo φ entre las rectas BA y $\gamma_1 B \gamma_2$. Este puede variar de 0 a π, y es que en el sistema de reposo los cuantos γ pueden moverse en cualquier dirección. Además, en el sistema de referencia del laboratorio el ángulo 2α variará entre las direcciones de salida de los dos cuantos γ. ¿Pero entre qué límites? Cuando $\varphi = 0$ ó π son dos cuantos γ y en el sistema de laboratorio volarán también en direcciones contrarias; con ello $2\alpha = \pi$, y la longitud de la perpendicular $b = 0$. Cuando φ crece de 0 a $\pi/2$, la longitud de la perpendicular b aumentará de cero hasta su valor máximo, igual a la distancia a entre los puntos A y B, y el ángulo de salida de los dos cuantos en el sistema de laboratorio, disminuirá respectivamente de π hasta un cierto valor mínimo $2\alpha_{\text{mín}}$, que se determina por la fórmula de Lobachevski (5.27):

$$\cos\alpha_{\text{mín}} = \text{th}\, b_{\text{máx}} = \text{th}\, a = v.$$

Así, en el sistema de laboratorio existe el menor ángulo de salida de los dos cuantos γ, que se forman como resultado de la descomposición del mesón π neutro. La comprobación experimental de la existencia de este ángulo mínimo de salida fue la primera comprobación de la existencia del mesón π^0 [1]). Dos contadores de cuantos γ, conectados según el esque-

---

[1]) *Steinberger J., Panovsky W. K. H., Steller J.* — Physical Review, 1950, v. 78, p. 802.

ma de coincidencias, fueron colocados bajo un ángulo uno respecto del otro y dirigidos al lugar donde supuestamente se descompusieron los mesones π^0, que tienen aproximadamente la misma velocidad v. Al disminuir el ángulo entre los contadores la intensidad del cálculo disminuye rápidamente al alcanzar el ángulo $\alpha_{mín}$, $\cos \alpha_{mín} = v$.

Lo más notable es que conceptos geométricos tan abstractos como las paralelas de Lobachevski y el ángulo de paralelismo adquirieron un sentido físico bien concreto. Desde luego, el tiempo necesario para esto no fue pequeño.

Capítulo 6
LEYES DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA Y DEL IMPULSO EN LA MECÁNICA RELATIVISTA

Si no deseamos estudiar únicamente el movimiento inercial de las partículas, y nosotros, desde luego, no queremos esto, lo primero que debemos comprender es cómo, en la mecánica relativista, se representan las leyes más «fundamentales» que describen los procesos de interacción, o sea, las leyes de la conservación de la energía y del impulso. Y es poco probable que sorprendamos al lector con el hecho de que en la teoría de la relatividad, las definiciones clásicas de energía y de impulso de una partícula

$$E = mv^2/2, \quad p = mv \tag{6.1}$$

tienen que ser revisadas. Y es que de acuerdo a estas definiciones la energía y el impulso de una partícula de masa m no pueden ser mayores que $E_{máx} = mc^2/2$ y $p_{máx} = mc$, ya que su velocidad no puede superar la de la luz[1]). Pero imaginémonos que la partícula cargada se halla en un acelerador circular, o sea, en un ciclotrón. En el proceso de aceleración la partícula, periódica y reiteradamente pasa por un mismo campo eléctrico acelerador, moviéndose por una órbita circular en el campo magnético. En cada revolución, el campo eléctrico realiza un mismo trabajo, que se gasta (según la ley de la conservación de la energía) en aumentar la energía cinética de la partícula. Cuantas más revoluciones se hacen, tanto mayor se vuelve la energía de la partícula y, en principio, puede ser tan grande como se quiera (si el campo magné-

[1]) En nuestro sistema de unidades la velocidad de la partícula es adimensional: $v = v_{común}/c$. Por eso, es conveniente en lo posterior medir la energía y el impulso de la partícula en unidades de masa: $E = E_{común}/c^2$, $p = p_{común}/c$, donde c es la velocidad de la luz.

tico, que mantiene a la partícula en su órbita, se puede aumentar adecuadamente). Pero la fórmula clásica de la energía, junto con el principio de relatividad de Einstein «no permite» a la energía de la partícula crecer ilimitadamente.

Las expresiones no relativistas para la energía y el impulso (6.1) son válidas sólo aproximadamente, cuando las velocidades de las partículas son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Para velocidades grandes éstas no concuerdan con las leyes de la conservación. Bueno, pues, les buscaremos una sustitución.

6.1. ¿QUÉ SABEMOS ACERCA DE LA ENERGÍA Y DEL IMPULSO?

Los conceptos de energía e impulso son introducidos en la física, precisamente porque para ellos son ciertas las leyes de la conservación. Justamente de esto partiremos al deducir las expresiones nuevas, relativistas, para la energía y el impulso de una partícula.

Planteemos el problema con más exactitud. El impulso de una partícula es un vector, dirigido a lo largo de su velocidad, cuya magnitud depende de la masa de la partícula y de su velocidad respecto al sistema de referencia dado. La energía de una partícula es una magnitud escalar que también depende de la masa y de la velocidad de la partícula. En el caso no relativista estas dependencias están dadas por las fórmulas (6.1). El aspecto que ellas tienen en la teoría de la relatividad es lo que tenemos que esclarecer más adelante. Desde luego, para velocidades no grandes las nuevas fórmulas tienen que transformarse en antiguas.

Las leyes de conservación de la energía y del impulso afirman que, al calcular la energía de todas las partículas que toman parte en alguna interacción (*energía total* del sistema de partículas) y la suma vectorial de sus impulsos (*impulso total*) siempre obtendremos un mismo valor, si el sistema de partículas dado es aislado [1]). En una palabra,

> *en un sistema aislado de partículas que interactúan se conservan la energía total y el impulso total del sistema.*

[1]) Es decir, que sobre él no actúan cuerpos externos.

Como muestra el experimento, las leyes de la conservación de la energía y el impulso se cumplen siempre y por doquier, sean como fuesen de complejos y confusos los procesos que ocurren con las partículas. Y en correspondencia directa con el principio de relatividad estas leyes son válidas en todos los sistemas inerciales de referencia.

Las interacciones complejas no nos serán necesarias. Estudiaremos las más sencillas de ellas, o sea, las colisiones elásticas de dos partículas. La naturaleza nos hizo un regalo valioso: resulta que se puede construir el grafo cinemático de la colisión elástica sin conocer las fórmulas exactas para la energía y el impulso. Por el contrario, mediante el grafo estas fórmulas pueden ser deducidas, si se exige que en cualquier sistema de referencia se cumplan las leyes de la conservación de la energía y del impulso durante una colisión elástica. Como veremos, mediante esta exigencia la dependencia de la energía y el impulso de una partícula de su masa y velocidad se determina por completo unívocamente.

6.2. GRAFO CINEMÁTICO DE LA COLISIÓN ELÁSTICA

Así pues, veamos una colisión elástica de dos partículas A y B. Partiremos de que la energía total y el impulso total del sistema de estas dos partículas, como resultado de la colisión no varía. ¿Qué se puede decir entonces acerca de la posición, en el espacio de velocidades, de los puntos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A'}$ y $\boldsymbol{B'}$, que representan las velocidades de estas partículas antes y después de la dispersión, respectivamente?

Tomemos en el segmento $\boldsymbol{AB}$ un punto arbitrario $\boldsymbol{O}$ y veamos lo que ocurre desde el sistema de referencia O que le corresponde a este punto. En este sistema de referencia las velocidades, y por lo tanto, los impulsos de las partículas A y B están dirigidos en sentidos contrarios, y sus magnitudes dependen de la posición del punto $\boldsymbol{O}$ en el segmento. En particular, si el punto $\boldsymbol{O}$ coincide con el extremo del segmento A, la velocidad y el impulso de la partícula A respecto al sistema de referencia O son iguales a cero, y el impulso de la partícula B no es nulo. Pero si el punto $\boldsymbol{O}$ coincide con $\boldsymbol{B}$, entonces al contrario, el impulso de la partícula B en el sistema O será igual a cero, y el de la partícula A no. Por eso,

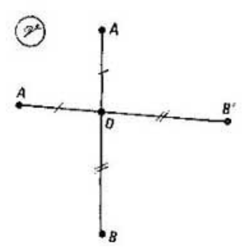


FIG. 6.1

desplazando el punto O por el segmento de un extremo a otro podremos hallar tal posición, para la cual los impulsos de las partículas serán iguales en magnitud, permaneciendo contrarios en dirección. El impulso total en el sistema de referencia correspondiente es igual a cero, con otras palabras, esto es el *sistema del centro de masa*. Denotémoslo en el grafo (véase fig. 6.1). Como el impulso total se conserva durante las interacciones, en el sistema del centro de masa los impulsos de las partículas A y B serán también, después de la colisión, iguales en magnitud y de sentidos contrarios. De aquí se deduce inmediatamente, que el segmento $A'B'$ en el espacio de velocidades pasa a través del punto O.

Ahora, utilizando la ley de la conservación de la energía demostraremos la igualdad de la longitud de los segmentos OA y OA', OB y OB'. Supongamos por ejemplo, que el segmento OA' es más largo que el segmento OA. Esto significa que, como resultado de la colisión, la velocidad de la partícula A aumentó. Por lo tanto, aumentaron su energía y su impulso. Pero los impulsos de las partículas A y B en el sistema del centro de masa son iguales en magnitud. Resulta que el impulso de la partícula B y, junto con él, su velocidad y su energía aumentaron también. Finalmente obtenemos que la energía total del sistema creció, cosa que no puede ser. Igualmente se demuestra que el segmento OA' no puede ser más corto que el segmento OA. Por eso, los segmentos OA y OA', OB y OB' deben ser iguales por pares.

El primer punto de nuestro plan ha sido cumplido, o sea, sin conocer las fórmulas para la energía y el impulso de una partícula y partiendo sólo de que la energía total y el impulso total de dos partículas en su sistema del centro de masa se conservan durante una colisión elástica, hemos establecido

el aspecto del grafo cinemático (fig. 6.1):

como resultado de una colisión elástica el segmento AB simplemente gira alrededor del punto O, con ello el punto A se transforma en A', y el B, en B'.

El ángulo de giro no se determina por las leyes de la conservación de la energía y del impulso, éste puede ser cualquiera.

Por el contrario:

la estructura descrita del grafo automáticamente suministra la conservación de la energía total y del impulso en el sistema del centro de masa O.

En efecto, de la igualdad de los segmentos OA y OA', OB y OB' resulta que, las velocidades de las partículas A y B en el sistema del centro de masa no varían en magnitud. Por eso, también las magnitudes de la energía y del impulso de cada una de las partículas en el sistema de referencia O siguen siendo las mismas, independientemente de la forma en que se expresen a través de las velocidades.

Pasemos ahora del sistema del centro de masa a cualquier otro sistema de referencia S. Es evidente, que al girar el segmento AB alrededor del punto O en el grafo cinemático (fig. 6.2), o sea, al variar el ángulo $\varphi = \widehat{SOA}$, las longitudes a y b de los segmentos SA y SB variarán. Esto significa, que en el sistema de referencia S las velocidades de las partículas como resultado de la colisión varían no sólo en dirección, sino que también en magnitud. Junto con ellas varían las energías E_A y E_B y los impulsos $\mathbf{p}_A$ y $\mathbf{p}_B$ de las partículas. Pero las leyes de la conservación deben cumplirse también en el sistema S. Y ahora, en general, éstas no se deducen por sí mismas del aspecto del grafo. Ante nosotros tenemos planteado un problema: hallar tales fórmulas para la energía y el impulso, que para todas las variantes de salida de las partículas después de la colisión, o sea, para todos los posibles valores del ángulo φ en el grafo, den resultados idénticos, no dependientes del ángulo φ, del valor de de la energía total

$$E_A + E_B = E$$

y del impulso total

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = \mathbf{p}.$$

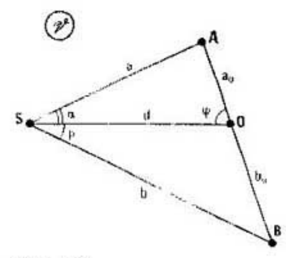


FIG. 6.2

FIG. 6.3

Esta última igualdad es vectorial. Por comodidad la escribiremos de nuevo en sus proyecciones a los ejes convenientes. Señalemos que el vector del impulso total $\boldsymbol{p}$ en el sistema de referencia S está dirigido a lo largo del vector de la velocidad del sistema del centro de masa respecto de S: $\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{v}_{O/S}$. En efecto, el vector $\boldsymbol{p}$ no varía al variar el ángulo φ. Pero cuando $\varphi = 0$, los puntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ en el espacio de velocidades se sitúan en la recta $\boldsymbol{SO}$. Por eso, cuando $\varphi = 0$ los impulsos de las partículas A y B en el sistema S, que siempre están dirigidos según las velocidades, serán colineales al vector $\boldsymbol{v}_{O/S}$. Por lo tanto, el impulso total $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B$ también será colineal a este vector. De aquí resulta que la proyección del vector $\boldsymbol{p}$ a la dirección del movimiento del sistema del centro de masa es igual, simplemente, a la magnitud p del impulso total. Al mismo tiempo, la proyección del vector del impulso de la partícula A a esta dirección es igual a $p_A \cos\alpha$, donde p_A es la magnitud del impulso, y α es el ángulo entre las velocidades de la partícula A y el sistema de referencia O respecto de S (en el grafo éste es el ángulo $\widehat{ASO}$; véase fig. 6.2). Análogamente, la proyección del impulso $\boldsymbol{p}_B$ de la partícula B a la misma dirección es igual a $p_B \cos\beta$, donde $\beta = \widehat{BSO}$. Así pues, $p_A \cos\alpha + p_B \cos\beta = p$ (fig. 6.3). Exactamente del mismo modo se obtiene la ecuación para la proyección de los impulsos de las partículas a la dirección perpendicular a la velocidad del centro de masa (fig. 6.3):

$$p_A \operatorname{sen}\alpha - p_B \operatorname{sen}\beta = 0,$$

Finalmente, en el sistema de referencia S las leyes de la conservación de la energía y del impulso durante una colisión elástica, adquieren una forma de tres ecuaciones:

$$E_A + E_B = E \quad (E \text{ no depende de } \varphi) \tag{6.2}$$

$$p_A \cos\alpha + p_B \cos\beta = p \quad (p \text{ no depende de } \varphi) \tag{6.3}$$

$$p_A \operatorname{sen}\alpha - p_B \operatorname{sen}\beta = 0. \tag{6.4}$$

Ahora debemos adivinar, qué combinaciones de las masas y de las velocidades de las partículas es necesario colocar en lugar de las energías y de los impulsos, en los primeros miembros de estas ecuaciones, para obtener las magnitudes, que no varían al girar el segmento AB alrededor del punto O, o sea, que no dependen de φ.

Comenzaremos por el caso no relativista, cuando la respuesta es conocida, e intentaremos comprender en qué consiste, digamos, «el mecanismo geométrico» de la constancia de la energía total y del impulso. Después introduciremos este mismo mecanismo en el plano de Lobachevski y, como por arte de magia, él nos proporcionará una pila completa de fórmulas importantes y útiles de la teoría de la relatividad. Y entre ellas, desde luego, las fórmulas relativistas para la energía y el impulso de una partícula. Unicamente, ya que nuestro «mecanismo» a pesar de todo es geométrico, nos pondremos de acuerdo en expresar la energía y el impulso no a través de las velocidades de las partículas A y B, sino a través de las correspondientes magnitudes geométricas, o sea, las distancias-$\mathcal{F}$' a y b.

6.3. CASO NO RELATIVISTA

Como la velocidad de una partícula en el sistema de referencia dado, para el caso no relativista es igual a la distancia entre los puntos correspondientes del espacio de velocidades, la energía y los impulsos de la partículas A y B en el sistema S son iguales a:

$$E_A = m_A a^2/2, \quad p_A = m_A a,$$
$$E_B = m_B b^2/2, \quad p_B = m_B b,$$

donde m_A y m_B son las masas de las partículas. Comprobemos que en efecto estas expresiones satisfacen las condiciones (6.2), (6.3) y (6.4).

Comencemos por la energía. Es necesario demostrar que la magnitud $m_A a^2/2 + m_B b^2/2$ no depende de φ (véase (6.2)). Expresemos cada sumando directamente a través del ángulo φ y de magnitudes que no dependen de φ. Según el teorema de los cosenos para los triángulos ***OSA*** y ***OSB***

$$a^2 = a_0^2 + d^2 - 2a_0 d \cos\varphi,$$
$$b^2 = b_0^2 + d^2 + 2b_0 d \cos\varphi$$

(en la segunda igualdad sustituimos $\cos(\pi - \varphi)$ por $-\cos\varphi$), donde a_0, b_0 y d son las longitudes de los segmentos ***OA***, ***OB*** y ***OS*** (fig. 6.2). Multiplicando la primera igualdad por $m_A/2$ y la segunda por $m_B/2$ y sumándolas obtenemos:

$$E_A + E_B = m_A a^2/2 + m_B b^2/2 = m_A a_0^2/2 + m_B b_0^2/2 + (m_A + m_B) d^2/2 - (m_A a_0 - m_B b_0) d \cos\varphi. \quad (6.5)$$

Los primeros tres sumandos en el segundo miembro no dependen de φ, y el último contiene como multiplicador la expresión $m_A a_0 - m_B b_0$. Pero esta es la diferencia de las magnitudes de los impulsos de las partículas en el sistema de su centro de masa O, donde el impulso total es igual a cero. Por lo tanto, el último sumando es igual a cero y la condición (6.2) se cumple. Señalemos de paso, que la voluminosa fórmula (6.5) tiene un sentido bastante simple. En efecto, denotemos con E_0 la energía cinética total de las partículas en el sistema del centro de masa: $E_0 = m_A a_0^2/2 + m_B b_0^2/2$, y con $M = m_A + m_B$ su masa total. Entonces (6.5) se reescribe en la forma:

$$E = E_A + E_B = E_0 + Md^2/2. \quad (6.6)$$

Este es el conocido teorema de König de la energía cinética: la energía cinética de dos partículas en un sistema de referencia arbitrario es igual a la suma de su energía cinética del movimiento en relación con el centro de masa y de la energía cinética del movimiento del centro de masa mismo $Md^2/2$ (recordemos que $d = v_{O|S}$).

Recordemos el «mecanismo» de deducción de la ley de conservación de la energía: es necesario escribir el teorema de los cosenos para los triángulos ***OSA*** y ***OSB***, multiplicarlos por la correspondiente masa y sumarlos.

Pasemos a la ley de conservación del impulso en su proyección a la dirección del movimiento del centro de masa

(6.3). La suma de las proyecciones de los impulsos de las partículas en esta dirección es igual a $m_A a \cos \alpha + m_B b \cos \beta$. Esta se transforma fácilmente mediante el teorema de los cosenos para los lados *OA* y *OB* de los triángulos *OSA* y *OSB*:

$$a_0^2 = a^2 + d^2 - 2\,da \cos \alpha,$$

$$b_0^2 = b^2 + d^2 - 2\,db \cos \beta.$$

Multipliquemos la primera igualdad por $m_A/2$, la segunda por $m_B/2$ y sumemos:

$$m_A a_0^2/2 + m_B b_0^2/2 = m_A a^2/2 + m_B b^2/2 + (m_A + m_B)\, d^2/2 - d\,(m_A a \cos \alpha + m_B b \cos \beta).$$

De aquí

$$m_A a \cos \alpha + m_B b \cos \beta = \frac{E - E_0}{d} + \frac{1}{2} Md$$

y según el teorema de König (6.6) tenemos:

$$p_A \cos \alpha + p_B \cos \beta = Md \qquad (6.7)$$

o sea, la proyección del impulso total a la dirección de movimiento del centro de masa no depende de φ.

Finalmente, veamos la última relación (6.4), o sea, la ley de la conservación del impulso en su proyección en dirección perpendicular a la velocidad del centro de masa. La proyección correspondiente del impulso total es igual a $m_A a \operatorname{sen} \alpha - m_B b \operatorname{sen} \beta$. Según el teorema de los senos para los triángulos *OSA* y *OSB* tenemos:

$$a \operatorname{sen} \alpha = a_0 \operatorname{sen} \varphi,$$

$$b \operatorname{sen} \beta = b_0 \operatorname{sen} (\pi - \varphi) = b_0 \operatorname{sen} \varphi.$$

Por lo tanto,

$$p_A \operatorname{sen} \alpha - p_B \operatorname{sen} \beta = m_A a_0 \operatorname{sen} \varphi - m_B b_0 \operatorname{sen} \varphi = (m_A a_0 - m_B b_0) \operatorname{sen} \varphi = 0, \qquad (6.8)$$

ya que en los paréntesis tenemos la magnitud del impulso total en el sistema del centro de masa.

De las fórmulas (6.7) y (6.8) se deduce que el vector del impulso total es igual al producto de la masa total por el vector de velocidad del centro de masa:

$$\boldsymbol{p} = M v_{O|S} \qquad (6.9)$$

o sea, el movimiento del centro de masa es parecido al movimiento de una de las partículas «componentes» con masa M y velocidad $v_{O|S}$. Esta analogía se puede ver en el caso relativista también. Esta última fórmula para el impulso completo la podríamos haber deducido mucho más rápido, pero a nosotros nos interesa no la fórmula misma, sino el «mecanismo» de su deducción, que también debe funcionar en el plano de Lobachevski. Este «mecanismo» es el teorema de los cosenos y de los senos.

6.4. ENERGÍA E IMPULSO EN LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Ahora tenemos el esquema de acción y trataremos de aplicarlo al caso relativista. La única diferencia será que ahora tendremos que utilizar el teorema de los senos y de los cosenos de la geometría del espacio de velocidades relativista, o sea, de la geometría de Lobachevski y no de la geometría de Euclides. Sin embargo, no es necesario dibujar de nuevo el grafo cinemático, podemos utilizar la fig. 6.2.

Repetiremos los razonamientos de la sección anterior. Esto nos permitirá adivinar primero la respuesta, o sea, las fórmulas para la energía y el impulso, comprobarla y después demostrar que estas fórmulas se determinan de un modo único.

Comenzaremos por expresar los lados a y b de los triángulos OSA y OSB (fig. 6.2) según el teorema de los cosenos en la geometría de Lobachevski (compárese con la deducción de la fórmula (6.5)):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} a &= \operatorname{ch} a_0 \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} a_0 \operatorname{sh} d \cos \varphi, \\ \operatorname{ch} b &= \operatorname{ch} b_0 \operatorname{ch} d + \operatorname{sh} b_0 \operatorname{sh} d \cos \varphi. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Multipliquemos la primera igualdad por m_A, la segunda por m_B y sumémoslas:

$$\begin{aligned} m_A \operatorname{ch} a + m_B \operatorname{ch} b = (m_A \operatorname{ch} a_0 + m_B \operatorname{ch} b_0) \operatorname{ch} d - \\ - (m_A \operatorname{sh} a_0 - m_B \operatorname{sh} b_0) \operatorname{sh} d \cos \varphi. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Comparemos esta fórmula con la expresión para la energía total en el caso no relativista (6.5). Para que esto sea más

sencillo escribámosla de nuevo:

$$m_A a^2/2 + m_B b^2/2 = m_A a_0^2/2 + m_B b_0^2/2 +$$
$$+ Md^2/2 + (m_A a - m_B b)\, d \cos \varphi.$$

La analogía es evidente. Aquí vemos que la energía total de dos partículas relativistas se conservará durante una colisión elástica, si se define la energía y el impulso de una partícula del siguiente modo:

la energía de una partícula relativista X en el sistema de referencia S es igual al producto de su masa m_X por el coseno hiperbólico de la distancia $\| SX \| = x$ entre los puntos del espacio de velocidades, que representan las velocidades del sistema de referencia S y de la partícula X:

$$E_X = m_X \operatorname{ch} x, \qquad (6.12)$$

el impulso de una partícula X en el sistema S es igual al producto de su masa por el seno hiperbólico de la distancia x:

$$p_X = m_X \operatorname{sh} x. \qquad (6.13)$$

En efecto, con esta definición el multiplicador $m_A \operatorname{sh} a_0 - m_B \operatorname{sh} b_0$ delante de $\cos \varphi$ en la igualdad (6.11), representa la diferencia de las magnitudes de los impulsos de las partículas en el sistema del centro de masa y por lo tanto, es igual a cero. Por eso, el segundo miembro de esta igualdad y, por lo tanto, también la energía total $E = m_A \operatorname{ch} a + m_B \operatorname{sh} b$ no depende de φ. Además, para la energía total se obtiene una expresión análoga a la fórmula no relativista (6.6):

$$E = E_0 \operatorname{ch} d, \qquad (6.14)$$

donde $E_0 = m_A \operatorname{ch} a_0 + m_B \operatorname{ch} b_0$ es la energía total de dos partículas en el sistema del centro de masa.

Señalemos de paso otra relación importante. Multiplicando el teorema de los cosenos (6.10) por la masa de la partícula A, obtenemos que

$$E = m_A \operatorname{ch} a = E_{A|O} \operatorname{ch} d - (p_{A|O} \cos \varphi) \operatorname{sh} d, \qquad (6.15)$$

donde $E_{A|O}$ es la energía de la partícula A en el sistema de referencia O, y $p_{A|O} \cos \varphi$ es la proyección de su impulso en la dirección del movimiento del sistema S respecto de O.

Esta fórmula muestra como se transforma la energía de la partícula al pasar del sistema O al sistema S. En el Apéndice regresaremos de nuevo a esto.

Dejaremos por ahora el examen de las nuevas definiciones de la energía y del impulso, pues necesitamos lo más pronto posible convencernos de que no sólo la energía total, sino que también el impulso total se conserva en las colisiones elásticas.

La proyección del impulso total en la dirección de movimiento del centro de masa (6.3) adquiere ahora el aspecto $m_A \operatorname{sh} a \cos\alpha + m_B \operatorname{sh} b \cos\beta$. Transformemos este sistema del mismo modo que en el caso no relativista. Escribamos el teorema de los cosenos de la geometría de Lobachevski para el lado ***OA*** del triángulo ***OSA*** (fig. 6.2):

$$\operatorname{ch} a_0 = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} d \cos\alpha$$

y multipliquemos esta igualdad por m_A:

$$m_A \operatorname{ch} a_0 = E_{A|O} = E_A \operatorname{ch} d - p_A \cos\alpha \operatorname{sh} d$$

(compárese con la fórmula (6.15)). Análogamente obtenemos

$$E_{B|O} = E_B \operatorname{ch} d - p_B \cos\beta \operatorname{sh} d.$$

Sumando estas igualdades y expresando de ellas la proyección necesaria del impulso total obtenemos

$$p_A \cos\alpha + p_B \cos\beta = \frac{1}{\operatorname{sh} d}\left(E \operatorname{ch} d - E_0\right) =$$

$$= E_0 \frac{\operatorname{ch}^2 d - 1}{\operatorname{sh} d} = E_0 \operatorname{sh} d \qquad (6.16)$$

(aquí utilizamos la fórmula (6.14) para la energía total y la identidad hiperbólica fundamental $\operatorname{ch}^2 d - \operatorname{sh}^2 d = 1$). La magnitud $E_0 \operatorname{sh} d$ no depende del ángulo φ, por lo tanto, la ley de la conservación del impulso en su proyección sobre la dirección del movimiento del centro de masa, se cumple.

Queda por demostrar que la proyección del impulso total sobre la dirección perpendicular $m_A \operatorname{sh} a \operatorname{sen}\alpha - m_B \operatorname{sh} b \times$ $\times \operatorname{sen}\beta$ es igual a cero (véase (6.4)). Según el teorema de los senos de la geometría de Lobachevski, para los triángulos ***OSA*** y ***OSB*** (compárese con la deducción de la fórmula (6.8)) tenemos:

$$\operatorname{sh} a \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sh} a_0 \operatorname{sen}\varphi, \quad \operatorname{sh} b \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sh} b_0 \operatorname{sen}\varphi.$$

De aquí obtenemos:

$$m_A \operatorname{sh} a \operatorname{sen} \alpha - m_B \operatorname{sh} b \operatorname{sen} \beta =$$
$$= (m_A \operatorname{sh} a_0 - m_B \operatorname{sh} b_0) \operatorname{sen} \varphi = 0, \qquad (6.17)$$

ya que en los paréntesis tenemos la magnitud del impulso total en el sistema del centro de masa.

Al lector riguroso las fórmulas obtenidas por nosotros para la energía y el impulso, pueden parecer poco fundamentadas. Y es que simplemente las hemos adivinado. ¿Y donde está la garantía de que no se pueden escribir otras fórmulas, para las cuales sean también válidas las condiciones (6.2), (6.3) y (6.4), o sea, las leyes de la conservación de la energía y del impulso en una colisión elástica? La respuesta se encuentra en estas mismas leyes. Tomemos, por ejemplo, el impulso. Como quiera que sea definida, la ley de la conservación del impulso total de dos partículas en su proyección en la dirección perpendicular al vector de la velocidad de su centro de masa, exige que esta proyección sea igual a cero (ecuación (6.4)), o sea,

$$p_A \operatorname{sen} \alpha = p_B \operatorname{sen} \beta,$$

donde p_A y p_B son los impulsos de las partículas, y α y β son los ángulos entre sus velocidades y la velocidad del centro de masa. Al mismo tiempo de acuerdo a (6.17),

$$m_A \operatorname{sh} a \operatorname{sen} \alpha = m_B \operatorname{sh} b \operatorname{sen} \beta.$$

Dividiendo la primera igualdad entre la segunda obtenemos

$$\frac{p_A}{m_A \operatorname{sh} a} = \frac{p_B}{m_B \operatorname{sh} b}.$$

El impulso de una partícula se debe determinar por completo por su masa y velocidad, por eso, el primer miembro aquí depende sólo de m_A y a (la velocidad de la partícula A es igual a $\operatorname{th} a$), y el segundo sólo de m_B y b. Se puede fijar la masa y la velocidad de la partícula B, o sea, m_B y b, y variar arbitrariamente la masa y la velocidad de la partícula A. Aquí, la relación $p_A/m_A \operatorname{sh} a$ debe permanecer constante. Por lo tanto, $p_A = km_A \operatorname{sh} a$, donde k es una constante que no depende ni de la velocidad ni de la masa de la partícula. Determinar la constante k únicamente de las leyes de la conservación, desde luego, no se puede. Pero nosotros queremos que en el límite no relativista (cuando la velocidad v de la partícula es pequeña en comparación con la velocidad de la

luz) el impulso adquiera el aspecto común $p_A = m_A v$. Para eso, es necesario suponer $k = 1$, ya que cuando $v \ll 1$, $v \approx a \approx \operatorname{sh} a$.

Con la energía el asunto es análogo. Formalmente la ley de conservación de la energía no se viola si la calculamos como $k_1 m \operatorname{ch} a + k_2$, donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias [1]). Veamos, sin embargo, que nos proporciona la fórmula $E = m \operatorname{ch} a$ en el límite no relativista:

$$E = m \operatorname{ch} a \approx m (1 + a^2/2) \approx m + mv^2/2$$

(recordemos que $\operatorname{ch} a \approx 1 + a^2/2$). De aquí se ve que el factor en esta fórmula no se puede variar, si queremos conservar la dependencia correcta de la energía cinética respecto a la velocidad en el límite no relativista, o sea, $k_1 = 1$. Y la adición a la energía cinética, la masa m de la partícula, apareció aquí no casualmente. Hallemos la energía relativista de una partícula en reposo: $E_0 = m \operatorname{ch} 0 = m$. Esta es la llamada *energía de reposo*; en nuestro sistema de unidades ella es igual a la masa de la partícula. En la física relativista, donde son posibles las transformaciones de unas partículas en otras, la ley de la conservación de la energía nos obliga a tomar en cuenta la energía de reposo en la constitución de la energía total. Por eso, en la fórmula $E = m \operatorname{ch} a$ no se puede ni aumentar ni quitar nada, incluso si el balance de energía en las colisiones elásticas tampoco se violara durante esto. Esto se confirma por numerosos experimentos, por ejemplo, la descomposición del mesón π^0, sobre el que hablamos en la sección 5.5. La energía de reposo del mesón π^0 en esta descomposición pasa por completo a la energía de los cuantos γ.

Ahora podemos analizar la fórmula para la energía total de dos partículas (6.14) de otra manera:

$$E = E_0 \operatorname{ch} d$$

y su impulso total (6.16):

$$p = p_A \cos \alpha + p_B \cos \beta = E_0 \operatorname{sh} d \qquad (6.18)$$

(el impulso total coincide, en magnitud, con su proyección en la dirección del movimiento del centro de masa, ya que

---

[1]) Además, al igual que en el caso del impulso, se puede demostrar que la expresión para la energía forzosamente tiene este aspecto (véase el suplemento 6.2 al final del capítulo).

su segunda proyección es igual a cero). De estas fórmulas se ve que el movimiento de un par de partículas, desde el punto de vista de su energía e impulso, puede ser analizado como el movimiento imaginario de una partícula «componente» con velocidad $v = v_{O|S} = \text{th}\, d$, además, la masa M de esta partícula «componente» es igual a E_0, o sea, a la energía sumaria del par de partículas en el sistema de su centro de masa. La energía total y el impulso total del par de partículas son iguales a la energía y el impulso de la partícula «componente». Unas puntas coinciden con las otras perfectamente: la energía de una partícula en su sistema del centro de masa, la energía de reposo, es igual a su masa, y la «masa total» M del par de partículas es igual a su energía total en el sistema de su centro de masa. ¡Energía = masa, y al revés, masa = energía!

Señalemos otra importante circunstancia. De la deducción de las expresiones para la energía total y el impulso total se ve, que las leyes de la conservación de la energía relativista y del impulso están estrechamente unidas una con otra. Por ejemplo, la conservación del impulso total en un sistema de referencia arbitrario S es posible sólo si al mismo tiempo se conserva la energía (relación (6.16)); a su vez, para que se conserve la energía es necesario que se conserve el impulso total en el sistema del centro de masa (relación (6.11)). Estas leyes simplemente no pueden cumplirse una sin la otra, ellas se unen en una ley única relativista de la conservación de la energía-impulso.

Hagamos el resumen. Si una partícula relativista de masa m se mueve respecto de un observador con velocidad $v = \text{th}\, a$, su impulso $p = m\, \text{sh}\, a$, y su energía $E = m\, \text{ch}\, a$. Es útil tener las expresiones del impulso y de la energía también directamente a través de la velocidad de la partícula. Recordando que $\text{sh}\, a = \text{th}\, a/\sqrt{1 - \text{th}^2 a}$, y $\text{ch}\, a = 1/\sqrt{1 - \text{th}^2 a}$, obtenemos:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}, \quad E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \qquad (6.19)$$

Cuando la velocidad de la partícula se aproxima a la de la luz ($v \to 1$), su impulso y su energía crecen ilimitadamente. Pero en realidad éstos siguen siendo finitos, por eso, una partícula que tiene una masa en reposo m no nula, nunca podrá moverse con la velocidad de la luz, aunque se la pueda

acelerar hasta velocidades tan cercanas como se quiera a c. Por ejemplo, en el acelerador de Batavia (EE.UU.), uno de los más potentes hoy día, los protones se aceleran hasta energías $E = 500$ GeV [1]). La masa en reposo de un protón es $m \simeq 1$ GeV. Utilizando la fórmula (6.19) se puede valorar la velocidad de los protones en este acelerador: la misma alcanza la magnitud $v \simeq 0{,}999\,998$ de la velocidad de la luz.

En distintos sistemas inerciales de referencia, los valores de la energía y del impulso de una misma partícula serán, desde luego, diferentes. Sin embargo, están ligados unos con otros mediante una relación muy importante: si restamos del cuadrado de la energía el cuadrado del impulso, obtenemos una magnitud *idéntica para todos los observadores inerciales*, o sea, el cuadrado de la masa de la partícula:

$$E^2 - p^2 = m^2 \operatorname{ch}^2 a - m^2 \operatorname{sh}^2 a =$$
$$= m^2 (\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a) = m^2 \cdot 1.$$

Así pues,

$$\boxed{E^2 - p^2 = m^2.} \qquad (6.20)$$

Las magnitudes, que no varían al pasar de un sistema inercial de referencia a otro, se denominan *invariantes relativistas*. Regresaremos a ellas en el Apéndice. Pronto conoceremos algunas aplicaciones de la fórmula fundamental (6.20) en la física experimental.

Las expresiones relativistas para la energía y el impulso fueron deducidas basándonos en las leyes de la conservación. Por eso, puede ser que se dude de la validez de estas mismas leyes, o sea, ¡vale la pena asombrarse de que se cumplan, si hemos *definido* la energía y el impulso de tal modo que se cumplan! Pero en nuestros razonamientos se analizaba sólo un tipo muy especial de interacciones de las partículas, esto es, la colisión elástica, en la cual la «individualidad» de las partículas interactuantes (su masa, carga y otras características internas) queda igual, y varían sólo su energía y su impulso. Ahora vamos a extender las leyes de la con-

---

[1]) 1 GeV = 10^9 eV (electronvoltios), 1 eV es la energía que adquiere una partícula con carga igual a la de un electrón, al pasar por una diferencia de potencial de 1 voltio. En la física experimental la masa de una partícula comúnmente se expresa en unidades energéticas, o sea, en electronvoltios.

servación a *todas* las interacciones que se observan. Este tipo de razonamiento es bastante típico para la física moderna y para la ciencia en general. Investigando un círculo de fenómenos (por ejemplo, la dispersión elástica), deducimos algunas regularidades (las leyes de la conservación de la energía y el impulso), les damos un carácter más general y después tratamos de aplicarlas a otro círculo de fenómenos (por ejemplo, al surgimiento y descomposición de las partículas relativistas o a sus transformaciones mutuas). Y, como regla, la naturaleza accede a nuestros deseos, o sea, muchas predicciones se confirman experimentalmente. De este modo ocurren los descubrimientos «en la punta de la pluma».

6.5. DESCOMPOSICIÓN Y SURGIMIENTO DE PARTÍCULAS RELATIVISTAS

Escribamos de nuevo las expresiones para el impulso y la energía totales de un par de partículas A y B, en el sistema de referencia S (véase (6.14), (6.18) y (6.19)):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B &= \mathbf{p} = M\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2}, \\ E_A + E_B &= E = M/\sqrt{1 - v^2}, \end{aligned} \tag{6.21}$$

donde $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O|S}$ es la velocidad del movimiento del sistema del centro de masa de las partículas A y B en relación con el sistema S, y M es la «masa equivalente» de las dos partículas, igual a su energía sumaria E_0 en el sistema del centro de masa. A la izquierda en (6.21) podemos tener la suma de los impulsos y de las energías de dos partículas tanto antes como después de la dispersión elástica, en esto, precisamente, consisten las leyes de la conservación de la energía y el impulso. Pero las fórmulas (6.21) pueden ser leídas de otro modo. Imaginémonos una partícula relativista de masa M, que se mueve con velocidad v en el sistema de referencia S (su impulso y su energía son iguales a $\mathbf{p}$ y E, respectivamente), y que después *se descompone* en dos partículas A y B con masas m_A y m_B, impulsos $\mathbf{p}_A$ y $\mathbf{p}_B$ y energías E_A y E_B. De acuerdo con (6.21) las leyes relativistas de la conservación de la energía y del impulso, en este proceso hipotético no se violarán. Y esto no es sólo

una hipótesis. Como muestran los experimentos, una gran cantidad de partículas elementales son en efecto inestables (viven un tiempo corto y después espontáneamente se descomponen en otras partículas), y en cada proceso de descomposición se cumplen las leyes relativistas de la conservación de la energía y del impulso (aquí, la suma de las masas en reposo de los productos de la descomposición siempre es menor que la masa en reposo de la partícula que se descompone: $M = E_0 = m_A \operatorname{ch} a + m_B \operatorname{ch} b \geqslant m_A + m_B$, ya que $\operatorname{ch} x \geqslant 1$).

¿Pero cómo podemos observar esta partícula, mediante qué «pesas» podemos medir su masa, si su tiempo de vida es comúnmente de sólo $10^{-13} \ldots 10^{-23}$ s? Aunque volara con la velocidad de la luz, en este tiempo ella podría recorrer sólo $\sim 10^{-2} \ldots 10^{-12}$ cm, y es prácticamente imposible observar su huella en una fotografía. El papel clave aquí lo juega la fórmula (6.20), no por casualidad la encerramos en un marco. Es necesario medir la energía E de la partícula, para eso se puede, utilizando la ley de la conservación de la energía, sumar las energías de las partículas, o sea, de los productos de la descomposición. Análogamente, utilizando la ley de la conservación del impulso, se puede medir su impulso p, sumando, según la regla del paralelogramo, los impulsos de todos los productos de la descomposición. Queda únicamente utilizar la fórmula (6.20). Si para un número grande de datos experimentales, los valores $E^2 - p^2$ se van a acumular cerca de una magnitud determinada m^2, entonces se puede suponer que en efecto, en una cierta reacción surgió y rápidamente se descompuso una partícula (o la llamada «resonancia») de masa m. Pero si el esparcimiento de los valores $E^2 - p^2$ en la serie de experimentos estudiada es muy grande, entonces lo más probable es que el origen de las partículas observadas no esté ligado con la descomposición de ciertas partículas «progenitoras» que viven poco tiempo. Los resultados de esta serie de experimentos se representan en un gráfico especial llamado *histograma* (fig. 6.4). En el eje de abscisas se coloca el valor $m^2 = E^2 - p^2$, y en el eje de ordenadas, el número de sucesos en los que se observó el valor determinado m. En la fig. 6.4, *a* se representa el histograma para el caso cuando la partícula que se descompuso, de masa m_0, en efecto existía y en la fig. 6.4, *b* tenemos los resultados de una reacción en la que al parecer no había tal partícula intermedia.

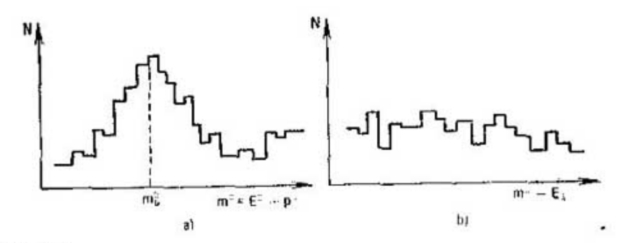


FIG. 6.4

Como las partículas pueden descomponerse, es natural suponer que es posible también el proceso contrario, que tampoco contradice las leyes de la conservación de la energía y del impulso (6.21), o sea, el proceso de surgimiento, cuando al chocar dos partículas A y B de masas m_A y m_B, impulsos $\boldsymbol{p}_A$ y $\boldsymbol{p}_B$ y energías E_A y E_B se forma una nueva partícula de masa $M \geqslant m_A + m_B$, impulso $\boldsymbol{p}$ y energía E. No se debe pensar, sin embargo, que tal partícula surge *obligatoriamente* para cada valor M de la masa. Si la partícula de masa M no existe en la naturaleza, entonces ella no surgirá durante la colisión. Las leyes de la conservación de la energía y del impulso únicamente *no prohíben* su posible surgimiento. Si esta partícula realmente existe, y en la supuesta reacción de su surgimiento no se violan otras leyes de la conservación (por ejemplo, las leyes de la conservación de la carga eléctrica, del número bariónico, etc.), entonces ella, por regla, surge en esta reacción (bajo la condición, desde luego, de que la energía de las partículas que chocan es suficiente para su surgimiento). Calculemos la magnitud de la masa M posible de esta partícula hipotética. Utilicemos la relación (6.20) y las leyes de la conservación de la energía y del impulso:

$$\begin{aligned} M^2 &= E^2 - \boldsymbol{p}^2 = (E_A + E_B)^2 - (\boldsymbol{p}_A + \boldsymbol{p}_B)^2 = \\ &= E_A^2 + E_B^2 + 2E_AE_B - \boldsymbol{p}_A^2 - \boldsymbol{p}_B^2 - 2\boldsymbol{p}_A\boldsymbol{p}_B = \\ &= (E_A^2 - p_A^2) + (E_B^2 - p_B^2) + 2E_AE_B - 2p_Ap_B\cos\vartheta = \\ &= m_A^2 + m_B^2 + 2(E_AE_B - p_Ap_B\cos\vartheta), \end{aligned}$$

donde como ϑ se designa el ángulo entre los vectores de los impulsos de las partículas $\boldsymbol{p}_A$ y $\boldsymbol{p}_B$.

El mayor interés práctico lo representa el caso particular de esta fórmula, cuando una de las partículas (la partícula

del blanco A) se encuentra en reposo en el sistema de referencia de laboratorio ($p_A = 0$, $E_A = m_A$) y la otra partícula (B) sale del acelerador con la energía E_B y choca con el blanco. En este caso obtenemos:

$$M^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2m_A E_B.$$

Para partículas lentas $E_B \simeq m_B$, por eso $M^2 = m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B = (m_A + m_B)^2$, esto es, aproximadamente se cumple la ley de adición de las masas. Pero en los aceleradores modernos la energía de las partículas del haz es mucho mayor que las masas en reposo ($E_B \sim 100$ GeV, m_A, $m_B \sim 1$ GeV), por eso, con buena exactitud

$$M \simeq \sqrt{2m_A E_B}.$$

En la fig. 6.5 se muestra el aspecto de esta dependencia para el caso de colisiones protónicas. Del gráfico se ve que la energía de un acelerador común se distribuye no muy efectivamente, para la formación de la «masa de reposo» de las nuevas partículas se gasta relativamente una parte no muy grande, $\sqrt{2m_A E_B}$, de la energía total E_B, el resto de la energía en general se gasta en vano, ella se transforma en energía del movimiento de traslación de la partícula formada. Por ejemplo, en el acelerador de Sérpujov (70 GeV) con utilidad se gastan sólo cerca de 12 GeV ($M \simeq 12$ GeV), en el moderno acelerador grande de Batavia (500 GeV) para la formación de una nueva masa de reposo M se gastan sólo 30 GeV.

Evidentemente, para librarse de estos gastos improductivos es necesario hacer de tal modo que la partícula que se forma no se mueva después de surgir. Este problema se resuelve en los aceleradores de haces contrarios, en los que las partículas que chocan se mueven al encuentro con igua-

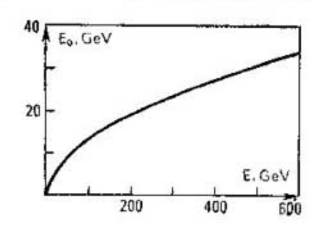


FIG. 6.5

les impulsos. El impulso de la partícula formada durante una colisión contraria será igual a cero, y toda la energía de las partículas incidentes puede ser transformada por completo en energía de reposo, o sea, en la masa $M = E_0$ de las partículas nuevas. Dos haces contrarios de 70 GeV serían equivalentes a un acelerador de energía $E = M^2/2m \simeq$ $\simeq 10\,000$ GeV. Sin embargo, aquí también existen sus dificultades. Comúnmente del acelerador sale un haz que contiene un número de partículas relativamente no muy grande, según las escalas macroscópicas. Este haz choca con el blanco inmóvil que contiene un número grande, macroscópicamente grande, de partículas, por ejemplo, con los protones de la cámara de burbujas de hidrógeno líquido. Al mismo tiempo, ocurre un conjunto de actos de colisión, cuyos resultados son fijados por nuestros aparatos. Gracias a esto es posible registrar también los procesos que ocurren con poca frecuencia, y que suelen ser los más interesantes. Por el contrario, en un haz opuesto la densidad de partículas no es grande, las colisiones ocurren con poca frecuencia y es necesario esperarlas por largo tiempo. Al ganar en energía perdemos en el tiempo de observación. A pesar de todo, los aceleradores de haces contrarios funcionan ya en Novosibirsk, Ginebra y EE.UU., se construyen y proyectan aceleradores nuevos con anillos acumuladores que aumentan su efectividad, entre ellos el de Sérpujov de energía del orden de 3000 GeV. Los haces contrarios con energía de 3000 GeV son equivalentes a un acelerador común de protones con blanco inmóvil, en el cual la energía de las partículas sería igual a 4 500 000 GeV [1]).

Para terminar este capítulo haremos la siguiente observación. Hemos deducido las expresiones para la energía y el impulso de las partículas relativistas y no relativistas utilizando las propiedades del grafo cinemático de las colisiones elásticas y el teorema de los senos y de los cosenos de la geometría de Lobachevski y de Euclides. Todos estos razonamientos pueden ser traducidos, casi literalmente, también al caso imaginario de la geometría esférica del espacio de velocidades. Puede ser que la naturaleza utilice también esta posibilidad en alguna parte, y que en un cierto mundo

[1]) En Ginebra actualmente funciona un acelerador de haces contrarios protón-antiprotón con una energía sumaria $E_0 = 270 + 270 = 540$ GeV. La energía equivalente a esto de un acelerador común es igual a 146 000 GeV.

hipotético de «esferones» hipotéticos al chocar las partículas se cumplen las leyes de la conservación de la energía y del impulso, pero la energía y el impulso de estas partículas extrañas están relacionados entre sí por la relación $E^2 + p^2 = m^2$. Queremos dejar a los lectores una posibilidad muy rara, la de desarrollar independientemente una nueva teoría, una mecánica que se diferencie de la de Newton y Einstein. Intente, paso a paso, establecer todas las fórmulas fundamentales y los corolarios de esta «mecánica imaginaria».

PROBLEMAS Y COMPLEMENTOS

1. Transformación del impulso al pasar a un nuevo sistema de referencia. Hallar la componente del impulso de la partícula A en el sistema de referencia S, que es paralela a la dirección del movimiento del sistema de referencia O, si se conocen: la misma componente del impulso y la energía de la partícula A en el sistema O y la velocidad del sistema O respecto de S. ¿Cómo varía la componente perpendicular del impulso?

(La respuesta y un examen detallado se pueden hallar en el Apéndice. La fórmula de la transformación de la energía fue deducida antes, véase (6.15)).

2. Energía relativista de una partícula. En la sección 6.4, mediante el grafo cinemático, de la conservación del impulso total en una colisión elástica en el sistema S dedujimos que el impulso de la partícula A de masa m_A que se mueve con velocidad $v_{A\,|\,S} = \text{th}\, a$, obligatoriamente tiene el aspecto $km_A \text{ sh } a$, y demostramos que $k = 1$. ¿Cómo demostrar una afirmación análoga para la energía?

Indicación. Supongamos que la partícula A choca elásticamente con la partícula B de masa m_B cuya velocidad es igual a $v_{B\,|\,s} = \text{th}\, b$ (véase fig. 6.2). La energía de la partícula se determina por su masa y velocidad, por eso, puede considerarse que la energía E_A de la partícula A es igual a f_A (ch a), y $E_B = f_B$ (ch b), donde $f_A(x)$ y $f_B(x)$ son ciertas funciones (los índices A y B indican la dependencia entre estas funciones y las masas de las partículas). La suma f_A (ch a) + f_B (ch b) = E es la energía total del sistema que se conserva. Expresar en esta igualdad ch a y ch b a través del ángulo φ y de los segmentos que no dependen de él a_0, b_0, d (véase fig. 6.2) y diferenciarla respecto de φ. Demostrar que para cualquier a y b, f'_A (ch a) : f'_B (ch b) = $m_A : m_B$. Deducir de aquí que la energía de la partícula de masa m y velocidad de movimiento $v = \text{th}\, x$ es igual a $k_1 m \times \text{ch}\, x + k_2$.

3. Caso no relativista. Utilizando el grafo cinemático de la colisión elástica y las leyes de conservación, demostrar que en el caso no relativista $p = kmv$, $E = k_1 mv^2 + k_2$.

4. Demostrar la fórmula $a = \frac{1}{2} \ln \frac{E+p}{E-p}$, donde E y p son la energía y el impulso de la partícula que se mueve con velocidad $v = \text{th}\, a$.

Capítulo 7
CINEMÁTICA DE LAS COLISIONES DE PARTÍCULAS RELATIVISTAS. FOTONES

Todo lo que sabemos ahora acerca de las partículas elementales, es el resultado del trabajo intenso de los experimentadores y teóricos que estudian las colisiones de partículas de altas energías en muchos laboratorios del mundo. Aquí no podemos detenernos a analizar con detalle como se logra esto, aunque el relato acerca de esto podría ser cautivador e interesante [1]. Nuestra meta es más sencilla, y es conocernos sólo con los conceptos fundamentales de la cinemática relativista, con las leyes de la conservación de la energía-impulso y asimilar el lenguaje de los grafos cinemáticos en el espacio de velocidades relativista. Este lenguaje atrae tanto por su evidencia geométrica como por su universalidad, él considera automáticamente las leyes de la conservación de la energía y del impulso en un sistema arbitrario de referencia. Para manejarlos mejor, veamos algunos problemas clásicos de la teoría relativista de colisiones

7.1. DISPERSIÓN ELÁSTICA DE PARTÍCULAS DE IGUAL MASA

En la fig. 7.1 se muestra una fotografía hecha en una cámara de Wilson: un electrón rápido que vuela por la izquierda se dispersa en un electrón en reposo. Las trazas de las partículas que participan en la colisión se ven en la fotografía en forma de una cadena de gotas de vapor con-

[1] Se pueden indicar, por ejemplo, los libros ya publicados de la serie «Biblioteca «Cuanto»: *Kopilov G. I.* Cinemática únicamente. Nº 11 (en ruso); *Borovoy A. A.* Como se registran las partículas. Nº 15 (en ruso).



FIG. 7.1

densado. Estas trazas llevan el nombre de pistas [1]). Póngase atención en el ángulo entre las pistas del electrón difuso y el electrón de retroceso, o sea, el ángulo bajo el cual se separan los electrones después de la colisión. Este se diferencia considerablemente de un recto, lo que contradice por completo las predicciones hechas por nosotros en el capítulo 1 para la dispersión de partículas no relativistas. Intentemos explicar este fenómeno y de paso calculemos la velocidad con la cual se movía el electrón que choca.

Construimos en el espacio de velocidades el grafo cinemático, correspondiente a este proceso (fig. 7.2). Mediante los puntos A y B se representan las velocidades de electrones antes de la colisión y mediante los puntos A' y B', sus velocidades después de la dispersión. Las masas de las partículas son iguales, por eso, el punto O correspondiente al sistema del centro de masa es el *punto medio* de los segmentos AB y $A'B'$. Como el lenguaje de los grafos cinemáticos considera automáticamente las leyes de conservación de la energía y del impulso, nos queda por hacer muy poco, o sea, establecer la correspondencia entre el grafo y aquello que vemos y que podemos medir en la fotografía. Con otras palabras, es necesario escoger en el grafo el punto correspondiente al sistema de referencia de laboratorio en el cual fue hecha la fotografía. La selección es evidente, ya que uno de los electrones, digamos el electrón A, antes del choque estaba en reposo en el sistema de laboratorio. Uniendo el punto A, en el grafo, mediante unas rectas con los puntos A' y B' obtenemos los siguientes tres ángulos (fig. 7.2):

$\vartheta = \widehat{BAB'}$, o sea, *el ángulo de dispersión* en el sistema de

[1]) La curvatura de las pistas está condicionada por el campo magnético, mediante el cual se determinaron los impulsos de los electrones.

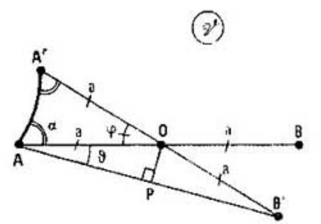


FIG. 7.2

laboratorio A, $\alpha = \widehat{A'AB}$, o sea, *el ángulo de entrega* bajo el cual sale el electrón que estaba en reposo, y $\beta = \widehat{A'AB'} = \alpha + \vartheta$, o sea, *el ángulo de salida*, o sea, el ángulo entre las direcciones de las velocidades de los electrones después de la colisión, igual al ángulo entre sus pistas en la fotografía. Ahora toma la palabra la geometría.

Para calcular el ángulo de separación $\beta = \alpha + \vartheta$, hallemos cómo está relacionado cada uno de los ángulos α y ϑ por separado con el ángulo de dispersión $\varphi = \widehat{BOB'}$ en el sistema del centro de masa. La relación entre los ángulos de dispersión ϑ y φ en estos dos sistemas de referencia, en el de laboratorio y en el del centro de masa, es por sí misma útil. El asunto es que para los cálculos teóricos es más cómodo el sistema del centro de masa, mientras que los experimentos se efectúan en el sistema de laboratorio, donde el blanco está en reposo, y por eso, es necesario trasladar las fórmulas del primer sistema al segundo. Deducir la dependencia entre ϑ y φ es bastante sencillo. A partir del punto O bajamos una perpendicular OP a la recta AB'. En el triángulo rectángulo AOP el ángulo $\widehat{OAP} = \vartheta$, y el ángulo $\widehat{AOP} = 1/2\ \widehat{AOB'} = 1/2\,(\pi - \varphi)$, ya que como también en la geometría euclidiana, la altura del triángulo isósceles AOB' en el espacio de velocidades coincide con su bisectriz. (Esto se ve de las consideraciones de simetría; realícese la demostración formal independientemente.) Escribamos ahora la relación (5.13) de la geometría de Lobachevski entre la hipotenusa $\| AO \| = a$ del triángulo AOP y los ángulos adyacentes a ella:

$$\operatorname{ctg} \vartheta \operatorname{ctg} \frac{\pi - \varphi}{2} = \operatorname{ch} a, \text{ o sea, } \operatorname{tg} \vartheta = \frac{2m}{E_0} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \tag{7.1}$$

donde $E_0 = 2m$ ch a es la energía sumaria de las partículas en el sistema del centro de masa. Exactamente igual se calcula el angulo de entrega α. Bajando a partir del punto O la altura del triángulo AOA' hallamos que

$$\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{ch} a, \text{ o sea, } \operatorname{tg}\alpha = \frac{2m}{E_0}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}. \qquad (7.2)$$

En el límite no relativista, cuando $E_0 \approx 2m$, las fórmulas (7.1) y (7.2) nos conducen al resultado ya conocido en el capítulo 1: $\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\varphi/2$, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi/2$, o sea,

$$\vartheta = \varphi/2, \quad \alpha = \pi/2 - \varphi/2.$$

El ángulo de salida de las partículas en este caso será recto: $\beta = \alpha + \vartheta = \pi/2$. Este hecho se puede explicar también de otra forma. En los triángulos isósceles AOA' y AOB' los ángulos de las bases son iguales, o sea, $\widehat{OA'A} = \widehat{OAA'} = \alpha$, $\widehat{OB'A} = \widehat{OAB'} = \vartheta$. Por lo tanto, el ángulo $\beta = \alpha + \vartheta$ es igual a la mitad de la suma de todos los ángulos del triángulo $AA'B'$. Esto es válido tanto en el caso no relativista, como en el relativista. Pero en el primer caso, la geometría del espacio de velocidades es euclidiana, la suma de los ángulos del triángulo es igual a π y el ángulo de salida siempre es recto. En el segundo caso actúan las leyes de la geometría de Lobachevski, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que π y el ángulo de salida de las partículas debe ser menor que un recto, lo que se ve bien en la fotografía (fig. 7.1). Así que puede analizarse como una demostración experimental directa de que la geometría del espacio de velocidades relativista no es euclidiana.

Investiguemos con más detalle el comportamiento del ángulo β durante una colisión esencialmente relativista. En la fórmula para la cotangente de la suma de α y ϑ:

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ctg}(\alpha + \vartheta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\vartheta}$$

sustituimos las expresiones para la $\operatorname{tg}\alpha$ y $\operatorname{tg}\vartheta$ de (7.1) y (7.2):

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1 - (2m/E_0)^2}{(2m/E_0)\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{2m} - \frac{2m}{E_0}\right)\operatorname{sen}\varphi. \qquad (7.3)$$

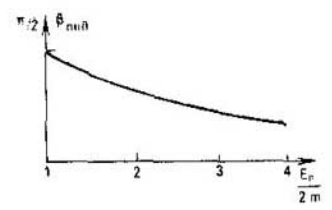


FIG. 7.3

Si el ángulo φ es pequeño, entonces en el sistema de laboratorio la partícula rápida también se dispersa con un ángulo ϑ no grande (véase (7.1)), los puntos A y A^1 en el grafo están cerca uno de otro y la partícula de retroceso se mueve casi perpendicularmente a la dirección del movimiento de la partícula incidente B. Aquí tratamos con el caso prácticamente no relativista, ya que ctg $\beta \approx 0$ y $\beta \approx \pi/2$. Al aumentar el ángulo φ el miembro derecho de la igualdad (7.3) crece y el ángulo de salida β decrece y alcanza su menor valor cuando $\varphi = \pi/2$. Además, en el sistema de laboratorio las partículas se separan simétricamente respecto a la dirección del movimiento del electrón incidente. Justamente éste es el caso que se fijó en la fotografía (fig. 7.1). El ángulo mínimo de salida $\beta_{\min}$ se determina por cualquiera de las dos fórmulas equivalentes:

$$\operatorname{ctg} \beta_{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{2m} - \frac{2m}{E_0}\right)$$
$$\text{o bien } \operatorname{ctg} \frac{\beta_{\min}}{2} = \frac{E_0}{2m}. \qquad (7.4)$$

En la fig. 7.3 hemos construido el gráfico de la dependencia entre $\beta_{\min}$ y la relación $E_0/2m$, donde E_0 es la energía de las dos partículas en el sistema de su centro de masa. Para una dispersión simétrica en el límite ultrarrelativista ($E_0 \gg 2m$) el ángulo de salida $\beta_{\min}$ tiende a cero. En nuestra fotografía el ángulo β es igual aproximadamente a 55°, $E_0/2m = $ $= \operatorname{ch} a = 2{,}17$. La distancia a entre los puntos O y A se puede hallar mediante la fórmula (7.4) y es igual a 1,41. Ahora podemos calcular la velocidad del electrón incidente en el sistema de laboratorio: $v = \operatorname{th} 2a = 0{,}887$. Ella resulta igual a $0{,}887c$, o sea, el electrón efectivamente es relativista.

7.2. DISPERSIÓN ELÁSTICA DE UNA PARTÍCULA PESADA POR UNA LIGERA EN REPOSO

Con este problema nos conocimos ya en el capítulo 1, dedicado a la cinemática no relativista. Allí establecimos que una partícula pesada incidente no puede dispersarse en un ángulo muy grande, en este caso existe un ángulo máximo de dispersión, que se determina por la relación de las masas de dos partículas que chocan: $\operatorname{sen} \vartheta_{\text{máx}} = m_A/m_B$. Pero ¿qué es lo que varía en el caso relativista, cuando la velocidad de la partícula pesada incidente B es comparable con la de la luz? Construyamos en el espacio de velocidades el grafo cinemático de este proceso (fig. 7.4). La velocidad del centro de masa de las partículas que chocan se representará por el punto $\boldsymbol{O}$, cuya posición en el segmento $\boldsymbol{AB}$ se determina por la regla relativista de la palanca $m_A \operatorname{sh} a = m_B \operatorname{sh} b$. Los puntos $\boldsymbol{B'}$ que representan las posibles velocidades de la partícula pesada dispersa, se sitúan en la circunferencia de radio b con centro en el punto $\boldsymbol{O}$. Al sistema de referencia de laboratorio, en el que la partícula ligera del blanco A estaba en reposo, le corresponde el punto A en el grafo. Éste se encuentra fuera de la circunferencia, ya que, como se deduce de la regla de la palanca, $\| \boldsymbol{OA} \| = a > b$. Por eso, el ángulo de dispersión ϑ de la partícula pesada en el sistema de laboratorio, o sea, el ángulo $\widehat{\boldsymbol{BAB'}}$ en el grafo, no puede ser muy grande, su valor máximo se alcanza cuando la recta $\boldsymbol{AB'}$ roza la circunferencia (demuéstrese esto, utilizando el teorema de

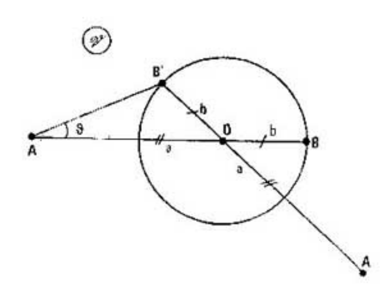


FIG. 7.4

los senos de la geometría de Lobachevski). En este caso el triángulo $AB'O$ es rectángulo y para él se puede escribir la relación (5.10), que expresa el cateto $\|OB'\| = b$ a través de la hipotenusa $\|OA\| = a$ y el ángulo opuesto $\hat{A} = \vartheta_{máx}$:

$$\text{sh } b = \text{sh } a \text{ sen } \vartheta_{máx}.$$

De acuerdo con la «regla de la palanca» relativista $\text{sh } b / \text{sh } a = m_A / m_B$, por eso obtenemos exactamente la misma fórmula para $\vartheta_{máx}$ que en el caso no relativista:

$$\text{sen } \vartheta_{máx} = \text{sh } b/\text{sh } a = m_A/m_B,$$

es decir, en el sistema de laboratorio el ángulo máximo de dispersión de una partícula pesada en una ligera depende sólo de la relación de sus masas y no depende de la energía. Al medir el ángulo máximo en una serie de experimentos bastante considerable, en principio se puede determinar la masa de las partículas pesadas que se dispersan, ya que la masa de las partículas del blanco comúnmente es conocida.

7.3. DISPERSIÓN ELÁSTICA DE UNA PARTÍCULA RELATIVISTA LIGERA POR UNA PESADA EN REPOSO

Analizaremos este proceso con más detalle, además trataremos de explicar como varía la energía de la partícula durante la dispersión. Posteriormente esto nos permitirá discutir uno de los experimentos físicos más importantes, es decir, el experimento de Compton de dispersión de los rayos X en la materia.

El esquema del experimento tiene el siguiente aspecto: un haz de partículas con una determinada energía E se dispersa por un blanco y se mide la distribución de las partículas dispersas según sus energías E' para diferentes ángulos dados de dispersión ϑ. Hallemos la dependencia E' en función de ϑ en una colisión elástica de una partícula ligera con una pesada. El grafo cinemático de este proceso se muestra en la fig. 7.5. El punto A corresponde a la partícula pesada de masa $m_A = M$, que se encuentra en reposo en el sistema de laboratorio, el punto B representa la veloci-

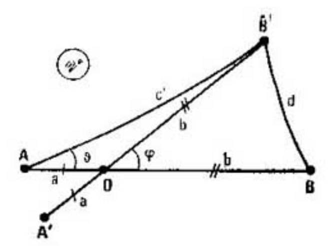


FIG. 7.5

dad de la partícula ligera incidente de masa $m_B = m$, y el punto B' su velocidad después de la dispersión. Denotemos con c la longitud de los segmentos iguales entre sí AB y $A'B'$ y con c' y d las longitudes de los segmentos AB' y BB' respectivamente. Entonces la energía de la partícula ligera antes de la dispersión es igual a $E = m \operatorname{ch} \| AB \| = m \operatorname{ch} c$, y después de la dispersión es igual a $E' = m \operatorname{ch} \| AB' \| = m \operatorname{ch} c'$. Utilicemos el hecho de que la ley de la conservación de la energía es válida en *cualquier* sistema de referencia. Lo más cómodo es tomar el sistema de reposo B' de la partícula ligera después de la dispersión, donde esta ley adquiere el aspecto $m \operatorname{ch} \| B'B \| + M \operatorname{ch} \| B'A \| = m + M \operatorname{ch} \| B'A' \|$ (recordemos que la energía de la partícula ligera es igual a su masa m), es decir,

$$m \operatorname{ch} d + M \operatorname{ch} c' = m + M \operatorname{ch} c. \tag{7.5}$$

Hallemos la dependencia en función del ángulo de dispersión $\vartheta = \widehat{BAB'}$ del primer sumando en el primer miembro $m \operatorname{ch} d$. Expresémoslo mediante el teorema de los cosenos para el triángulo ABB':

$$\operatorname{ch} d = \operatorname{ch} c \operatorname{ch} c' - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} c' \cos\vartheta =$$
$$= \operatorname{ch} c \operatorname{ch} c' (1 - \operatorname{th} c \operatorname{th} c' \cos\vartheta).$$

Ahora recordemos que $\operatorname{th} c = v$ y $\operatorname{th} c' = v'$ es la velocidad de la partícula ligera, mientras que $m \operatorname{ch} c = E$ y $m \operatorname{ch} c' = E'$ es su energía antes y después de la dispersión en el sistema de laboratorio, por lo tanto

$$\operatorname{ch} d = \frac{E}{m} \frac{E'}{m} (1 - vv' \cos\vartheta).$$

Sustituyendo esta expresión en la ley de la conservación de la energía (7.5) obtenemos la fórmula definitiva que relaciona las energías inicial y final de la partícula incidente con el ángulo de su incidencia

$$M(E-E')=EE'(1-vv'\cos\vartheta)-m^2. \qquad (7.6)$$

Representa gran interés el analizar esta fórmula en el límite ultrarrelativista, cuando la energía E y, por lo tanto, también E', son mucho mayores que la masa en reposo de la partícula ligera: $E, E' \gg m$. Su velocidad antes y después de la dispersión en este caso es muy cercana a la de la luz, $v \simeq 1$, $v' \simeq 1$, además, en el segundo miembro de (7.6) se puede despreciar el cuadrado de la masa m^2 en comparación con el primer término que contiene el producto EE'. Como resultado obtenemos una relación sencilla conocida como la fórmula de Compton:

$$M(E-E')=EE'(1-\cos\vartheta). \qquad (7.7)$$

7.4. EFECTO COMPTON. FOTONES

En 1923 Arthur Compton al estudiar la dispersión de los rayos X por un blanco de grafito observó que una parte de la radiación dispersada tenía una frecuencia ν' menor que la frecuencia del haz incidente ν. Desde el punto de vista de la teoría clásica este efecto no debería de existir. Esta teoría explicaba la dispersión de cualquier radiación electromagnética del siguiente modo. El campo eléctrico alternativo de la onda incidente actúa sobre las partículas cargadas ligeras, o sea, sobre los electrones que siempre hay en la materia, y los obliga a realizar oscilaciones forzadas con una frecuencia igual a la de la onda incidente. Los electrones oscilantes, a su vez, irradian una onda electromagnética «dispersa» cuya frecuencia coincide con la frecuencia de las oscilaciones del electrón irradiante, o sea, con la frecuencia de la onda original.

Veamos ahora los resultados de las mediciones realizadas por Compton. En la fig. 7.6 están representados los gráficos de la dependencia entre la intensidad de la radiación dispersa y su frecuencia para cuatro valores del ángulo de dispersión ϑ. El pico derecho en estos gráficos responde a la fre-

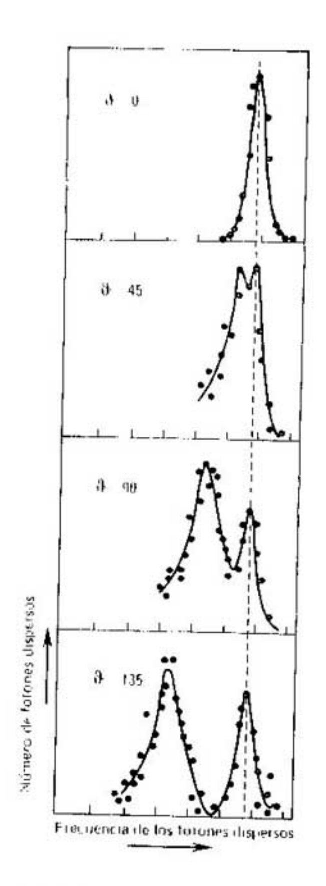


FIG. 7.6

cuencia de la radiación radiológica incidente ν, pero para los ángulos de dispersión, distintos de cero, aperece un *segundo* pico de intensidad, cuyo máximo corresponde a la frecuencia ν' menor, además, al aumentar el ángulo de dispersión este pico se desplaza hacia la región de frecuencias menores.

Estos resultados se encontraban en contradicción evidente con las opiniones clásicas de la radiación electromagnética y de su interacción con la materia. La solución fue hallada en la síntesis de la mecánica relativista y las ideas cuánticas.

En los trabajos de M. Planck sobre la radiación del cuerpo negro (1900) y de A. Einstein sobre el fotoefecto (1905) fue mostrado que es necesario considerar la radiación electromagnética como compuesta de porciones separadas, o sea, de *cuantos*, o *fotones*, que poseen una energía bien definida $E_{\text{común}} = h\nu$ [1]) y se mueven con una velocidad igual a la de la luz (propiamente dicho, ellos son la luz). La representación de la radiación electromagnética como un flujo de partículas, o sea, de fotones permite fácilmente dar una explicación cualitativa de los resultados de Compton. En efecto, cada cuanto de los rayos X (fotón) puede chocar con un electrón libre o débilmente ligado en la materia del blanco. Como resultado el fotón se dispersa con un cierto ángulo ϑ, y su energía, y junto con ella la frecuencia, también disminuye, ya que una parte de la energía original del fotón incidente será tomada por el electrón de retroceso. Estos razonamientos cualitativos tienen que ser reafirmados por un cálculo cuantitativo. ¿Pero cómo realizarlo, si todas las fórmulas obtenidas por nosotros hasta ahora se referían a las partículas «comunes» que se mueven con velocidades menores que la de la luz? Podemos tratar de pasar en ellas al límite tendiendo las correspondientes velocidades a la de la luz. Pero incluso desde el lado puramente formal esto se logra no siempre. Las mismas fórmulas fundamentales que determinan la energía y el impulso de una partícula relativista

$$E = m \operatorname{ch} a = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad p = m \operatorname{sh} a = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \tag{7.8}$$

---

[1]) Recordemos que en nuestro sistema de unidades la velocidad de la luz es igual a la unidad y la energía y el impulso se miden en unidades de masa. Así pues, para los fotones obtenemos $E = E_{\text{común}}/c^2 = h\nu/c^2$, $p = p_{\text{común}}/c$, donde h es la constante de Planck ($h = 6{,}6256 \cdot 10^{-34}$ kg·m²/s) y ν es la frecuencia de la radiación electromagnética.

pierden ya su sentido para los fotones y, en general, para cualesquiera partículas que se mueven con la velocidad de la luz: cuando $v = 1$ éstas proporcionan valores infinitos de la energía y del impulso. Para salvar la situación es necesario considerar la masa del fotón m igual a cero. Pero esto también ayuda poco, ya que cuando $m \to 0$, $v \to 1$ en las fórmulas (7.8) surge una indeterminación, y el numerador y el denominador se anulan. Así pues, las fórmulas (7.8) tomadas por separado no son aplicables a los objetos físicos que se mueven con la velocidad de la luz. Sin embargo, de ellas se pueden deducir las relaciones que quedan bien interpretadas al pasar a tales objetos. La primera de ellas se obtiene si eliminamos de (7.8) la masa de la partícula, dividiendo la expresión para el impulso por la expresión para la energía: $p/E = v$ o bien

$$p = Ev.$$

De ésta se deduce que $p/E \to 1$, cuando la velocidad de la partícula tiende a la velocidad de la luz, y cuando $v = 1$ ella se vuelve por completo sencilla:

para cualesquiera partículas, que se mueven con la velocidad de la luz, el impulso es igual a la energía.

La segunda relación se puede obtener eliminando de (7.8) la velocidad de la partícula. Esta es la bien conocida fórmula para el cuadrado de la masa:

$$E^2 - p^2 = m^2$$

Junto con la igualdad $E = p$ ella esclarece de nuevo por qué

la masa de las partículas, que se mueven con la velocidad de la luz, es igual a cero.

Los fotones y otros objetos físicos, cuyas masas son iguales a cero, pueden encontrarse sólo en estado de movimiento con la velocidad de la luz y no pueden ser acelerados ni frenados. Mientras existen, esta velocidad constante les pertenece al igual que a otras partículas les pertenecen la masa y la carga. Pero las partículas sin masa poseen energías e impulsos plenamente determinados, que pueden variar en el proceso de una interacción con otras partículas. Además, como muestra el experimento, en estas interacciones siempre se cumple la ley de la conservación del impulso

y la energía. Un ejemplo de esto puede ser el experimento de Compton, al que volveremos ahora.

Deduzcamos la fórmula que determina el desplazamiento de la frecuencia de la radiación dispersa en este experimento. Para eso, hagamos un paso límite en la fórmula que determina la energía E' de la partícula de masa m después de la colisión con la partícula de masa M (fórmula (7.6) de la sección anterior):

$$M(E - E') = EE'(1 - vv' \cos\vartheta) - m^2. \qquad (7.9)$$

Fijemos en esta igualdad las magnitudes E y E' de las energías de la partícula incidente antes y después de la dispersión, y tendamos su masa m a cero. Entonces sus velocidades deberán tender a la de la luz: v, $v' \to 1$. Al igual que en las fórmulas $p = Ev$ y $E^2 - p^2 = m^2$ y no surge aquí ninguna expresión indefinida y sin sentido. En todas estas fórmulas podemos, sin obstáculos, poner las velocidades iguales a 1, y la masa m igual a 0 y obtener las relaciones ya para las partículas sin masa, o sea, los fotones. Como resultado la fórmula (7.9) se transforma en la conocida fórmula ultrarrelativista (7.7), que corresponde al caso límite de las energías E y E' mucho mayores que la masa de la partícula ligera m:

$$M(E - E') = EE'(1 - \cos\vartheta).$$

El experimento muestra que este método para obtener las fórmulas para las partículas sin masa conduce siempre a resultados correctos. En particular, los datos experimentales sobre la dependencia entre la energía y el ángulo de dispersión ϑ, con buena exactitud coincidieron con los pronósticos hechos con la fórmula teórica de Compton. Los experimentos de Compton confirmaron no sólo cualitativamente, sino que también cuantitativamente, la suposición de que el fotón se comporta como una partícula relativista, que posee energía e impulso $p = E$, además al interactuar con los electrones libres, el impulso total y la energía en el sistema «electrón + fotón» en efecto se conservan.

En realidad en el experimento de Compton se midió la frecuencia de la onda dispersa, por eso es conveniente escribir de nuevo la fórmula de Compton en el sistema de unidades común, dividiendo al mismo tiempo ambos miembros

entre $E' = h\nu'$ y expresando la energía del fotón a través de su frecuencia:

$$\frac{\nu}{\nu'} = 1 + \frac{h\nu}{Mc^2}(1 - \cos\vartheta). \qquad (7.10)$$

La frecuencia del fotón no varía sólo durante la dispersión en el ángulo nulo, al aumentar el ángulo ϑ la frecuencia y la energía del fotón disperso disminuyen, además, el desplazamiento de la frecuencia es máximo en la dispersión «hacia atrás», cuando $\vartheta = \pi$. Esto es los que observó A. Compton (picos izquierdos en la fig. 7.6). ¿Pero cómo explicar entonces que en las dispersiones de ángulos grandes, en los gráficos se tienen picos que corresponden a la frecuencia de la onda incidente? El asunto es que en el choque de un fotón con un electrón, que se encuentra en una capa cercana al núcleo y por eso ligado fuertemente a éste, toma parte ya no un electrón por separado, sino todo el átomo en conjunto. Pero entonces, en la fórmula (7.10), para el desplazamiento de la frecuencia, es necesario, en lugar de la masa del electrón M sustituir la masa de todo el átomo, que para el grafito supera en más de 20 mil veces la masa del electrón. Con ello la adición $\frac{h\nu}{Mc^2}(1 - \cos\vartheta)$ en el segundo miembro de (7.10) puede despreciarse, por lo tanto, en la dispersión de los fotones en estos electrones no ocurre el desplazamiento de la frecuencia.

La fórmula de Compton puede ser vista también por otro lado. Escribámosla de nuevo así:

$$M = \frac{EE'(1 - \cos\vartheta)}{E - E'}. \qquad (7.11)$$

Si la dispersión ocurre en un blanco que contiene partículas desconocidas a nosotros, la masa de éstas puede ser *calculada* sustituyendo en esta fórmula los *valores medidos* de E, E' y ϑ. Si para diferentes ángulos de dispersión ϑ obtenemos una misma magnitud, se puede con seguridad afirmar que la dispersión, en efecto, ocurre en partículas de masa M casi libres. Para diferenciar con seguridad en el gráfico experimental la presencia de dos picos con energías E y E', la energía de las partículas del haz incidente debe ser bastante grande ($E \sim M$), al mismo tiempo ella debe ser considerablemente mayor que la energía de interacción de las partículas desconocidas con la materia, y es que la fórmula

de Compton fue deducida para la dispersión en partículas *libres*. Si estas condiciones son observadas, como lo fue en el experimento de Compton, los gráficos experimentales de la fig. 7.6 pueden ser interpretados del siguiente modo.

Los dos picos de intensidad de las partículas dispersas, con un ángulo ϑ fijo son testimonio de que en la materia del blanco hay dos tipos de partículas. En primer lugar, estos son los átomos pesados, cuyas masas son mucho mayores que la energía E de los cuantos γ incidentes; a la dispersión en ellos corresponde el pico derecho con $E' = E$. El pico izquierdo corresponde a la dispersión de los fotones en partículas ligeras, cuyas masas pueden ser calculadas según la fórmula (7.11) para diferentes ángulos de dispersión ϑ. Y aquí siempre se obtendrá la magnitud M próxima a la masa del electrón conocida ya de otros experimentos independientes. Esto permite, finalmente, identificar las partículas ligeras en los experimentos de Compton con los electrones.

7.5. EFECTO DOPPLER

Hasta ahora casi no hemos hablado acerca de cómo medir realmente la velocidad de las partículas móviles. Tales problemas surgen con mucha frecuencia en la ciencia moderna y en la técnica. Para corregir la órbita de una estación interplanetaria es necesario conocer, con mucha exactitud, la magnitud de su velocidad en el momento de arranque del motor, con una precisión de 1 m/s para una velocidad del orden de 10 km/s. Los sistemas de radiolocalización para detectar cohetes y aviones también deben medir exactamente la magnitud y dirección de la velocidad de su vuelo. El astrónomo quiere medir la velocidad de una galaxia lejana y el inspector de tránsito la velocidad de los automóviles en el flujo del transporte. En todos estos casos se utilizan aparatos, cuyo principio de acción es el mismo, o sea, el efecto Doppler. La esencia de éste consiste en que la frecuencia de las ondas electromagnéticas depende de la velocidad relativa de la fuente de radiación y del observador. Este efecto es característico para cualquier movimiento oscilatorio, y se puede observar, por ejemplo, cuando al lado de una plataforma pasa un tren eléctrico que silba. El sonido alto de la sirena del tren que se acerca se sustituye por uno

más bajo de menor frecuencia, cuando el tren se aleja del observador. El desplazamiento de la frecuencia depende de la velocidad con que se mueve la fuente del sonido. El efecto Doppler depende, *en un caso general*, tanto de la velocidad de la fuente, como de la velocidad del observador respecto del medio en el que se propagan las ondas de sonido. Para las *ondas electromagnéticas* la situación es más sencilla, en correspondencia con el principio de relatividad el desplazamiento de la frecuencia puede depender sólo del vector de la velocidad relativa del movimiento de la fuente y del observador: aquí no se puede hablar de ningún «medio» en el que se propagan las ondas electromagnéticas. Trataremos de determinar esta dependencia.

La frecuencia de las ondas electromagnéticas está ligada con la energía de los fotones por la fórmula de Planck $E_{\text{común}} = h\nu$. Si hallamos como varía la energía de los fotones al pasar del sistema de referencia de la fuente al sistema del observador móvil, al mismo tiempo obtendremos también la fórmula para la variación de Doppler de la frecuencia. Apliquemos el mismo método que el empleado en la deducción de la fórmula de Compton. Demos al fotón una cierta masa finita, determinemos su energía en el nuevo sistema de referencia, y después pasemos al límite $m \to 0$, $v \to 1$. En la fig. 7.7 se muestra el grafo correspondiente en el espacio de velocidades. El punto A es el sistema de referencia del radiador en el cual la energía de la partícula F de masa m es igual a $E_A = m \operatorname{ch} a$. El punto B representa la velocidad del observador, que se mueve bajo un ángulo ϑ hacia la dirección del movimiento de la partícula F, además $v_{B|A} = \operatorname{th} b$. La energía de la partícula F en el sistema de

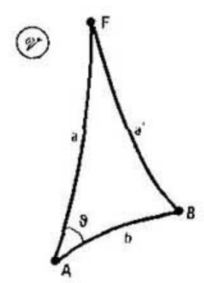


FIG. 7.7

referencia B será igual a $E_B = m \operatorname{ch} a'$. Puede ser hallada mediante el teorema de los cosenos para el triángulo ABF:

$$E_B = m \operatorname{ch} a' = m (\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \vartheta) =$$
$$= m \operatorname{ch} a (\operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{th} a \cos \vartheta).$$

La relación de las energías

$$E_B/E_A = m \operatorname{ch} a'/m \operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \operatorname{th} a \cos \vartheta$$

ya no dependerá de la masa de la partícula y el paso límite al fotón resulta evidente: el punto F se aleja al absoluto en el espacio de velocidades, y la velocidad de la partícula $v = \operatorname{th} a$ se vuelve igual a la unidad. Como resultado obtenemos la fórmula para la transformación de la energía del fotón y al mismo tiempo la fórmula para la variación de la frecuencia de la onda electromagnética al pasar a otro sistema inercial de referencia:

$$\nu_B/\nu_A = h\nu_B/h\nu_A = E_B/E_A = \operatorname{sh} b - \operatorname{ch} b \cos \vartheta. \tag{7.12}$$

Ésta puede ser escrita de nuevo en forma stándard que se da en todos los manuales de óptica:

$$\nu_B/\nu_A = (1 - v \cos \vartheta)/\sqrt{1 - v^2}. \tag{7.13}$$

Aquí v es la velocidad relativa del movimiento del sistema de referencia A y B, y ϑ es el ángulo entre la dirección del movimiento del fotón y el sistema de referencia del observador B respecto del sistema de referencia A. Los dos casos particulares de la fórmula de Doppler representan el mayor interés.

Supongamos que A es una galaxia lejana, en la que los átomos excitados irradian cuantos de luz con frecuencia ν_A. Las leyes de la física son iguales para todas las partes del Universo observado, por eso, los espectros de irradiación de los átomos que se encuentran en condiciones iguales en la Tierra y en la galaxia A a distancia de millones y miles de millones de años luz, deben ser por completo iguales. Pero si esta galaxia se aleja de nosotros a gran velocidad, entonces para el observador en la Tierra cada línea de este espectro, irradiada con frecuencia ν_A, resultará desplazada y debido al efecto Doppler tendrá otra frecuencia ν_B, distinta de ν_A. En este caso, cuando la galaxia observada se aleja de nosotros a lo largo de una recta, que la une con la Tierra, el

ángulo ϑ entre la dirección del movimiento de la Tierra y la velocidad de los fotones irradiados en el sistema A es igual a cero. La fórmula de Doppler (7.12) adquiere aquí un aspecto particularmente sencillo (la examinaremos en el siguiente capítulo)

$$\nu_B/\nu_A = \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}(e^b + e^{-b}) - \\ - \frac{1}{2}(e^b - e^{-b}) = e^{-b}, \qquad (7.14)$$

o sea, la frecuencia recibida será menor que la irradiada en e^b veces. Este fenómeno fue descubierto experimentalmente y se le llamó *desplazamiento rojo* debido a que el espectro de radiación de cada átomo se desplaza hacia el lado de las frecuencias menores, o sea, a la región roja de la parte visible del espectro. De este modo fueron medidas las velocidades de muchas galaxias:

$$v = \operatorname{th} b = \frac{e^b - e^{-b}}{e^b + e^{-b}} = \frac{\nu_A^2 - \nu_B^2}{\nu_A^2 + \nu_B^2}.$$

De acuerdo con estas mediciones, las galaxias se alejan una de otra con una velocidad proporcional a la distancia entre ellas. Así mismo se confirmó que vivimos en un Universo que se expande. Los objetos más alejados que han sido observados en la actualidad, los llamados «quasares» tienen un desplazamiento rojo del orden de $\nu_A : \nu_B = 2 \ldots 2{,}5$, lo que corresponde a la velocidad de alejamiento $v \approx \approx 0{,}6 \ldots 0{,}7$ de la velocidad de la luz. La luz va desde ellos hacia nosotros miles de millones de años y lleva información acerca de como era el Universo en aquellos tiempos lejanos.

Otro efecto interesante vaticinado por la fórmula relativista (7.12) es la presencia del llamado efecto transversal Doppler. Se le puede observar cuando la fuente se mueve perpendicularmente a la dirección de observación ($\vartheta = \pi/2$). En este caso

$$\nu_B/\nu_A = \operatorname{ch} a = 1/\sqrt{1 - v^2}.$$

Éste es interesante por el hecho de que con tal disposición del observador y de la fuente el desplazamiento de la frecuencia surge sólo en el caso de las ondas electromagnéticas, para las ondas comunes en un medio el efecto transversal

Doppler no existe. Por lo demás, también para las ondas electromagnéticas este efecto es muy débil por lo general. Para velocidades no muy grandes, el desplazamiento de la frecuencia es prácticamente proporcional al cuadrado de la relación entre la velocidad de la fuente y la velocidad de la luz:

$$\nu_B/\nu_A = (1 - v^2)^{-1/2} \approx 1 + v^2/2 \text{ o bien}$$
$$(\nu_B - \nu_A)/\nu_A \approx v^2/2.$$

Esta magnitud es comúnmente muy pequeña para cualquier situación un tanto real. Otro asunto es el efecto «longitudinal» Doppler. Cuando en la fórmula (7.13) pasamos al límite no relativista de las velocidades pequeñas $v \ll 1$, bajo la raíz podemos despreciar el cuadrado de la velocidad en comparación con la unidad. Como resultado obtenemos la bien conocida fórmula para el efecto clásico de Doppler:

$$\nu_B/\nu_A = 1 - v \cos\vartheta \text{ ó bien}$$
$$(\nu_B - \nu_A)/\nu_A = v \cos\vartheta = (v_{\text{común}}/c) \cos\vartheta.$$

Esta es precisamente la que se utiliza en la medición real de las velocidades de los objetos, acerca de los cuales hablábamos al principio de esta sección. Por ejemplo, en un aparato cósmico, en un satélite o en una nave interplanetaria, se colocan radiotransmisores con frecuencia ν_A estabilizada, y en la Tierra, un sistema de radio que permite con gran exactitud medir ν_B y $\cos\vartheta$; según los resultados de estas mediciones mediante la fórmula de Doppler se determina la velocidad del aparato cósmico. Del mismo modo los sistemas de radiolocación miden la velocidad de los aviones y de los cohetes, según la variación de la frecuencia de la señal reflejada y hasta el inspector de tránsito que le multó a usted por exceso de velocidad utiliza, y puede ser que él mismo no lo sepa, el efecto Doppler en que se basa el principio de acción de su ingenioso aparato, destinado a la medición de la velocidad.

Capítulo 8
FÍSICA GEOMÉTRICA O GEOMETRÍA FÍSICA

Hemos recorrido un camino largo y difícil, ahora llegó el momento de detenernos, ver y comprender los resultados obtenidos, pero ya desde otro, más alto, punto de vista. La ascensión a las montañas resulta en ocasiones difícil, cada vez ves delante de sí sólo la meta más próxima, la cúspide más cercana, tras la cual se esconden otras nuevas. A cambio de esto, desde la más alta cúspide, delante del hombre se abre el panorama del país montañoso, surge un nuevo nivel de comprensión de lo que se ha hecho y se vuelven visibles caminos más rápidos y cortos. Verlos es posible sólo desde la cúspide e ir por ellos es posible sólo cuando se tiene ya el conocimiento y la experiencia obtenidos en la dura ascensión.

Recordemos las etapas fundamentales de nuestro recorrido: el principio de relatividad, los mapas de velocidades, el espacio de velocidades relativista y su geometría, la energía y el impulso relativistas en las colisiones elásticas, las leyes de conservación de la energía y del impulso en los procesos inelásticos, que incluyen el surgimiento y la descomposición de las partículas elementales, o sea, el modelo de los fotones como partículas relativistas que poseen energía e impulso. En esencia, esta fue la cadena de predicciones lógicas dadas por la teoría. Sin embargo, sólo el experimento puede mostrar si son ciertas o no, corresponden o no a la naturaleza en realidad. De que esto es así nos convence todo el conjunto de datos experimentales que tenemos.

Ahora, cuando delante de nuestros ojos tenemos este cuadro general se podrán obtener todas las fórmulas físicas y geométricas fundamentales de la teoría de un modo rápido y económico. Como base se tendrán el principio de relatividad, las leyes de la conservación de la energía y del im-

pulso y el hecho experimental no trivial: la posibilidad de la descomposición del mesón π^0 en dos cuantos γ, cada uno de los cuales tiene un determinado impulso y energía. Seremos fieles a sí mismos, o sea, cada uno de los resultados importantes será necesario saber obtenerlo mediante diferentes métodos.

8.1. DE NUEVO ACERCA DE LA ENERGÍA Y DEL IMPULSO DE LAS PARTÍCULAS RELATIVISTAS

Veamos primero un fotón F, el cual en un cierto sistema de referencia A tiene la energía E_A. De acuerdo con el principio de relatividad su velocidad es igual en todos los sistemas inerciales, por eso, el punto que lo representa F deberá ser un punto infinitamente alejado en el espacio de velocidades. Supongamos que tenemos otros dos observadores B y C, que se mueven en la misma dirección que el fotón en el sistema de referencia A. En el espacio de velocidades les corresponderán los puntos B y C situados en la recta AF (fig. 8.1). Denotemos con E_B y E_C las energías del fotón en los sistemas de referencia B y C. La relación de las energías E_B/E_A es una magnitud adimensional, y puede depender sólo de la velocidad del sistema B respecto de A, con otras palabras, la podemos escribir como una función continua de la distancia entre los puntos A y B en el espacio de velocidades:

$$E_B/E_A = f\,(\|AB\|).$$

Además, según el principio de relatividad, la función f es *universal*, una misma para todos los sistemas de referencia, de modo que

$$E_C/E_B = f\,(\|BC\|), \quad E_C/E_A = f\,(\|AC\|).$$

La función f describe la variación de la energía del fotón al pasar de un sistema de referencia a otro (a lo largo de la

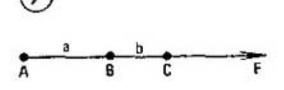


FIG. 8.1

1/2 12—01123

recta $\mathscr{F}$ dada). Pasemos del sistema A al sistema C por pasos: primero de A a B, después de B a C. A este paso corresponde la igualdad evidente $E_C/E_A = (E_B/E_A) \times \times (E_C/E_B)$, o sea,

$$f(\|AC\|) = f(\|AB\|)\, f(\|BC\|).$$

Los puntos A, B, C en el espacio de velocidades se encuentran en una recta (fig. 8.1), por eso, $\|AC\| = \|AB\| + \|BC\|$. Por lo tanto, la función f debe satisfacer la ecuación funcional

$$f(a+b) = f(a)\, f(b),$$

donde $a = \|AB\|$, $b = \|BC\|$. La solución general de esta ecuación la proporciona la función exponencial $f(x) = = e^{-\alpha x}$. Escogimos el signo menos en el exponente para obtener una función decreciente ($\alpha \geqslant 0$), ya que la energía de cualquier partícula relativista, y del fotón también, debe disminuir al pasar al sistema de referencia que se mueve en la misma dirección que la misma partícula.

Si el coeficiente α no es igual a cero, en el espacio de velocidades se puede escoger la unidad de medición de las distancias de tal modo que $\alpha = 1$ [1]. Así, hemos deducido del principio de relatividad, que si los puntos A, B, y F están en una recta AF en la secuencia A, B, F, para el fotón F es válida la igualdad

$$E_B/E_A = e^{-\|AB\|}. \tag{8.1}$$

Ésta es la fórmula conocida ya en el capítulo anterior para el efecto Doppler longitudinal.

Acudiremos ahora al impulso del fotón p_A. La relación de las magnitudes de la energía y del impulso de cualquier partícula no depende de la masa y se determina sólo por su velocidad en el sistema de referencia dado. Pero la velocidad de los fotones es igual en todos los sistemas inerciales, por eso, esta relación debe ser una constante universal que debemos suponer igual a la unidad. (De esto nos convenceremos un poco más adelante). Así, el impulso del fotón es codiri-

---

[1]) Si $\alpha = 0$, la energía y el impulso del fotón serán iguales en todos los sistemas inerciales de referencia, y la geometría del espacio de velocidades será la geometría de Euclides. Este «fotón» no puede interactuar con otras partículas sin violar las leyes de la conservación de la energía y del impulso en todos los sistemas inerciales de referencia. En la mecánica no relativista no hay fotones.

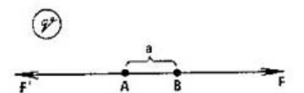


FIG. 8.2

gido a su velocidad y en magnitud es igual a la energía del fotón: $p = E$.

Ahora pasaremos de los fotones a las partículas que tienen masa. En la física relativista es conocido el proceso, cuando tal partícula, mesón π^0, se descompone espontáneamente en dos fotones, F y F'. Este es un hecho experimental y será la base de nuestros razonamientos futuros.

Veamos primero la descomposición de un pión en su sistema de reposo A. El impulso del pión es igual a cero, denotaremos su energía de reposo con E_0. De las leyes de la conservación de la energía y del impulso se deduce que los productos de la descomposición, los fotones F y F', en el sistema A deben tener impulsos iguales en magnitud y de sentidos contrarios, la energía de cada uno de ellos es igual a $E_0/2$:

$$p_A = E_A = E_0/2, \quad p'_A = E'_A = E_0/2.$$

Pasemos ahora al sistema de referencia B, que en el espacio de velocidades se representa por el punto situado en la recta $F'AF$ (fig. 8.2). En este sistema, antes de su descomposición, el pión se mueve en la dirección BF'; denotaremos su energía y su impulso en el sistema B con E^π y p^π. Estas magnitudes de algún modo dependen de la velocidad del pión, o sea, de la distancia $\| AB \| = a$ entre los puntos A y B. Pero también en el sistema B, durante la descomposición del pión, deben cumplirse las leyes de la conservación:

$$E^\pi = E_B + E'_B, \qquad p^\pi = p'_B - p_B, \tag{8.2}$$

donde E_B, p_B, E'_B, p'_B son las energías y los impulsos de los fotones F y F' en el sistema de referencia B.

Para los fotones conocemos las fórmulas de transformación de la energía y del impulso (8.1) al pasar al sistema de

referencia B:

$$p_B \quad E_B = E_A e^{-a} = \frac{E_0}{2} e^{-a};$$

$$p'_B = E'_B - E'_A e^{a} = \frac{E_0}{2} e^{a}$$

(para el fotón F' el paso de A a B conduce al aumento de su energía y de su impulso y se realiza mediante la transformación, inversa a (8.1)). Por eso, la ley de conservación de la energía y del impulso en el proceso de descomposición se escribirá en el sistema B del siguiente modo:

$$\begin{aligned} E^{\pi} &= \frac{E_0}{2} e^{a} + \frac{E_0}{2} e^{-a} = E_0 \operatorname{ch} a, \\ p^{\pi} &= \frac{E_0}{2} e^{a} - \frac{E_0}{2} e^{-a} = E_0 \operatorname{sh} a \end{aligned} \qquad (8.3)$$

Aquí vemos que de las leyes de la conservación se deducen las expresiones relativistas para la energía y el impulso de la partícula móvil: $E = E_0 \operatorname{ch} a$, $p = E_0 \operatorname{sh} a$, y en virtud del principio de relatividad estas expresiones deben ser iguales en cualquier sistema de referencia, sin que forzosamente esté situado en la recta $F'AF$.

Para la partícula que tiene el sistema de reposo A y una energía de reposo E_0, podemos hacer lo que no se podía para los fotones, o sea, pasar al límite no relativista. En este caso

$$\| AB \| = a \approx v, \quad \operatorname{sh} a \approx a \approx v,$$
$$\operatorname{ch} a \approx 1 + a^2/2 \approx 1 + v^2/2,$$

por eso, la energía y el impulso de esta partícula serán iguales a

$$E = E_0 \operatorname{ch} a \approx E_0 + E_0 v^2/2, \quad p = E_0 \operatorname{sh} a \approx E_0 v.$$

Comparando estas expresiones con las definiciones no relativistas

$$E = mv^2/2 + \text{const}, \quad p = mv,$$

llegamos a la conclusión de que la energía de reposo E_0 no es otra cosa más que la masa de la partícula m ($E_0 = m$), por eso, para cualquier partícula relativista obtenemos de

nuevo las definiciones ya conocidas de la energía y el impulso relativistas:

$$E = m \operatorname{ch} a, \quad p = m \operatorname{sh} a.$$

Al mismo tiempo cumplimos la promesa hecha antes, o sea, prácticamente demostramos lo correcto de la selección del valor del coeficiente que une la energía y el impulso del fotón ($E = p$). La cadena de razonamientos tiene el siguiente aspecto: de los fotones a las partículas con masa, después el paso al límite no relativista, la mecánica de Newton y las fórmulas clásicas para la energía y el impulso de una partícula. La magnitud de este coeficiente *no se puede* fijar, sin analizar la *dinámica de la interacción*. La dinámica relativista es compleja, por eso, tuvimos que obrar por rodeos.

8.2. DESCOMPOSICIÓN DE UN PIÓN NEUTRO Y LA GEOMETRÍA DE LOBACHEVSKI

Veamos el mismo proceso de descomposición desde el punto de vista del observador B, cuyo sistema de referencia se representa en el espacio de velocidades por un punto situado en la perpendicular AB a la recta $F'AF$ (fig. 8.3). Unamos el punto B con los puntos infinitamente alejados F y F', que representan las velocidades de los fotones. Denotemos como a la distancia $\| AB \|$ y como Π la magnitud del ángulo bajo el cual se intersecan en el punto B las rectas BF y BA. En virtud de la simetría, el ángulo ABF' también será igual a Π. (Sabemos ya que Π es el ángulo de paralelismo de Lobachevski.) Por definición, el ángulo entre las rectas en el espacio de velocidades Π, es igual al ángulo entre las direcciones de las velocidades del pión y del fotón F desde el punto de vista del observador B.

Escribamos ahora en el sistema de referencia B, la ley de la conservación de la energía y del impulso en su proyec-

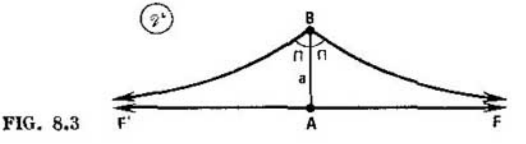


FIG. 8.3

ción a la dirección BA. En virtud de la simetría del grafo, las energías y los impulsos de los fotones son iguales unos a otros en magnitud, por eso,

$$E_B^{\pi} = E_0 \operatorname{ch} a = E_B + E'_B = 2E_B, \tag{8.4}$$

$$p_B^{\pi} = E_0 \operatorname{sh} a = p_B \cos \Pi + p'_B \cos \Pi = = 2E_B \cos \Pi \tag{8.5}$$

(recordemos que la energía y el impulso del fotón son iguales entre sí: $p_B = E_B$).

La ley de la conservación del impulso en su proyección a la *perpendicular* BA se cumple automáticamente en virtud de la simetría respecto de la recta AB. La ley de la conservación de la energía (8.4) nos proporciona la fórmula para el efecto transversal Doppler relativista, o sea, se establece la relación entre la energía del fotón F en el sistema de referencia A, $E_A = E_0/2$, y su energía en el sistema de referencia B, que se mueve en dirección perpendicular a la velocidad del fotón $v_{F|A}$:

$$E_B = E_A \operatorname{ch} a. \tag{8.6}$$

Pero la ley de la conservación del impulso en su proyección a la dirección BA determina la magnitud del ángulo de paralelismo de Lobachevski. En efecto, sustituyendo (8.4) en (8.5) obtenemos que

$$E_0 \operatorname{sh} a = E_0 \operatorname{ch} a \cos \Pi$$

o bien

$$\cos \Pi = \operatorname{th} a. \tag{8.7}$$

Pongamos atención a que el hecho experimental de la descomposición del mesón π^0 en dos fotones, resulta equivalente al axioma geométrico de Lobachevski acerca de las paralelas. La ley de la conservación del impulso exige que el ángulo de paralelismo Π sea menor que un recto, ya que el impulso del pión está dirgido por la recta BA. Por eso, también los productos de la descomposición, los fotones, deben tener en el sistema de referencia B, una proyección no nula del impulso a esta dirección, o sea, $\Pi < \pi/2$.

Si el espacio de velocidades tuviera la geometría euclidiana, el ángulo de paralelismo Π sería igual a un recto y la descomposición del pión en dos cuantos γ sería prohibida

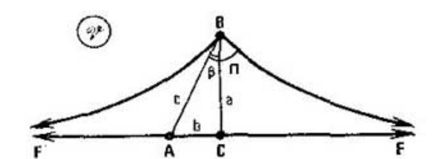


FIG. 8.4

por la ley de la conservación del impulso. En la física no relativista son imposibles los procesos que transcurren con la variación de la masa de la partícula. Aquí vemos lo estrecha e inseparablemente que están ligadas una con otra la física y la geometría. Aquí se nos presentan como una ciencia única, que puede ser llamada física geométrica o bien geometría física. Pero la relación entre ellas no se agota sólo con esto.

Veamos la misma descomposición en un sistema arbitrario de referencia, cuya posición en el espacio de velocidades estará dada del siguiente modo. Nos desplazamos desde el punto A, del sistema de reposo del mesón π^0, en una distancia b a lo largo de la recta AF y desde el punto C obtenido levantamos una perpendicular CB, cuya longitud denotaremos con a. Unimos de nuevo, mediante rectas, el punto B con los puntos infinitamente alejados, que representan las velocidades de los fotones F y F' (fig. 8.4). Estas rectas, como siempre, se intersecarán con la perpendicular CB bajo el ángulo de paralelismo Π, además, $\cos \Pi = \operatorname{th} a$. Calculemos el seno del ángulo de paralelismo (recordemos que $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$):

$$\operatorname{sen} \Pi = \sqrt{1 - \cos^2 \Pi} = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 a}{\operatorname{ch}^2 a}} =$$
$$= \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a}{\operatorname{ch}^2 a}} = \frac{1}{\operatorname{ch} a}. \tag{8.8}$$

Hallemos ahora la magnitud de la energía y del impulso de los fotones F y F' en el sistema B. Consecuentemente utilizaremos primero la transformación transversal Doppler (8.6) desde el punto B hasta el punto C, y después la transformación longitudinal (8.1) del punto C al punto A:

$$p_B = E_B = E_C \operatorname{ch} a = E_A e^{-b} \operatorname{ch} a = \frac{E_0}{2} e^{-b} \operatorname{ch} a,$$
$$p'_B = E'_B = E'_C \operatorname{ch} a = E_A e^{b} \operatorname{ch} a = \frac{E_0}{2} e^{b} \operatorname{ch} a.$$

En el sistema de referencia B la energía del mesón π^0 que se descompone se define por la distancia entre el punto B y el sistema de reposo A, o sea, por la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC, cuya longitud denotamos con c: $E_B^{\pi} = E_0 \operatorname{ch} c$. Escribamos la ley de la conservación de la energía en el sistema B: $E_B^{\pi} = E_B + E'_B$ o, bien

$$E_0 \operatorname{ch} c = \frac{E_0}{2} e^{-b} \operatorname{ch} a + \frac{E_0}{2} e^{b} \operatorname{ch} a = \frac{E_0}{2} \operatorname{ch} a (e^{b} + e^{-b}),$$

de donde se deduce que

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b. \qquad (8.9)$$

Aquí vemos que la ley de la conservación de la energía no es otra cosa más que el «teorema de Pitágoras» para un triángulo rectángulo en el espacio de velocidades, o sea, la fórmula ya conocida de la geometría de Lobachevski.

En el sistema de referencia B el impulso del pión tiene la magnitud $p^{\pi} = E_0 \operatorname{sh} c$ y está dirigido por BA formando un ángulo β con la perpendicular BC, los impulsos de los fotones están dirigidos por BF y BF' bajo el ángulo de paralelismo Π a la misma perpendicular. La ley de la conservación del impulso en el sistema B, en su proyección a la dirección perpendicular a BC, se escribe del siguiente modo:

$$E_0 \operatorname{sh} c \operatorname{sen} \beta = p'_B \operatorname{sen} \Pi - p_B \operatorname{sen} \Pi.$$

Sustituyendo aquí $p_B = \frac{E_0}{2} e^{-b} \operatorname{ch} a$, $p'_B = \frac{E_0}{2} e^{b} \operatorname{ch} a$ en la expresión (8.8) para el seno del ángulo de paralelismo $\operatorname{sen} \Pi = 1/\operatorname{ch} a$, obtenemos que

$$E_0 \operatorname{sh} c \operatorname{sen} \beta = \frac{E_0}{2} \operatorname{ch} a (e^{b} - e^{-b}) \frac{1}{\operatorname{ch} a} = E_0 \operatorname{sh} b$$

y de aquí, la relación métrica, que expresa en la geometría de Lobachevski el cateto del triángulo rectángulo a través de la hipotenusa y el ángulo opuesto:

$$\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \operatorname{sen} \beta.$$

Finalmente, escribamos la ley de la conservación del impulso en su proyección a la dirección BC:

$$E_0 \operatorname{sh} c \cos \beta = p_B \cos \Pi + p'_B \cos \Pi =$$
$$= (p_B + p'_B) \cos \Pi.$$

Señalemos que $p_B + p'_B = E_B + E'_B = E^{\pi}_B = E_0 \operatorname{ch} c$, y $\cos \Pi = \operatorname{th} a$, por eso, la ley de la conservación de esta proyección del impulso adquiere el aspecto

$$\operatorname{sh} c \cos \beta = \operatorname{ch} c \operatorname{th} a.$$

Dividiendo ambas partes de esta igualdad entre $\operatorname{ch} c$, obtendremos la relación que expresa el cateto del triángulo rectángulo a través de la hipotenusa y el ángulo adyacente en la geometría de Lobachevski:

$$\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos \beta.$$

Así, las fórmulas de la trigonometría de Lobachevski se nos presentan como un corolario de las leyes de la conservación de la energía y del impulso en la descomposición del mesón π^0 en dos fotones. Y se siente la mano del destino en el hecho de que esta partícula elemental y el ángulo de paralelismo fueron denotados por Lobachevski con una misma letra del alfabeto griego (π, minúscula y Π, mayúscula).

Ahora podríamos obtener todas las demás fórmulas de la trigonometría de Lobachevski, los teoremas de los cosenos y de los senos, igual que los obtuvimos en el capítulo 4. Pero no nos repetiremos, nuestro relato llega su fin. Tenemos esperanza de que convencimos al lector de lo geométrico de la física y del carácter físico de la geometría. La teoría especial de la relatividad se nos presentó como una ciencia geométrica, siendo, en este sentido, parecida a la teoría general de la relatividad de Einstein, a la teoría de la gravitación, la cual no sin base lleva otro nombre más, la geometrodinámica. Esperamos también que el lector haya adquirido cierta experiencia, suficiente para utilizar libremente la geometría del espacio relativista de velocidades y pueda calcular diferentes reacciones con la participación de partículas relativistas, utilizando solamente tales conceptos como su energía, sus impulsos, las distancias y los ángulos en el espacio de velocidades. Si esto es así en efecto, consideraremos que nuestra tarea ha sido lograda.

12-01123

Apéndice
TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Hemos dado a conocer al lector el método geométrico de la teoría especial de la relatividad. El método analítico vectorial de coordenadas es más tradicional. La relación entre ellos es aproximadamente la misma que entre los métodos «puramente geométrico» y el vectorial en la geometría común: éstos son dos lenguajes distintos de una teoría y en principio son equivalentes, pero para situaciones concretas uno de ellos puede resultar más cómodo, por eso es útil conocer los dos.

Prácticamente en todos los libros de la teoría de la relatividad es usual el método «analítico», de modo que hablar en detalle acerca de él aquí no tiene sentido, y haremos sólo un primer paso: utilizando la geometría del espacio de velocidades deduciremos las fórmulas, según las cuales se transforman las magnitudes físicas fundamentales al pasar a un nuevo sistema de referencia.

TRANSFORMACIÓN DE LA ENERGÍA Y DEL IMPULSO

Supongamos que conocemos la energía E y el impulso $\boldsymbol{p}$ de una partícula A de masa m en un cierto sistema de referencia O. Veamos un segundo sistema de referencia O', que se mueve con respecto al primero con velocidad constante $v = \operatorname{th} b$. En este nuevo sistema la energía y el impulso de la partícula A tendrán otros valores E' y $\boldsymbol{p}'$. Tratemos de explicar como están relacionados los nuevos valores con las magnitudes E y $\boldsymbol{p}$, medidos en el sistema original «viejo» de referencia O.

Veamos en el espacio de velocidades el triángulo $OO'A$, cuyos vértices representan las velocidades de los sistemas

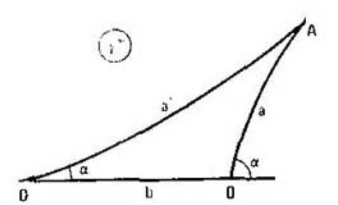


FIG. A.1

de referencia O y O' y de la partícula A. Supongamos que a y a' son las longitudes $\mathcal{T}$· de sus lados OA y $O'A$; entonces las magnitudes de la energía y del impulso de la partícula en nuestros dos sistemas se expresan a través de a y a' según las fórmulas (véase capítulo 6):

$$E = m \operatorname{ch} a, \quad p = m \operatorname{sh} a,$$
$$E' = m \operatorname{ch} a', \quad p' = m \operatorname{sh} a'.$$

De aquí se ve que el nuevo valor de la energía se puede obtener mediante el teorema $\mathcal{T}$· de los cosenos (para el lado $O'A$ del triángulo $OO'A$)

$$\operatorname{ch} a' = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo externo del triángulo en el vértice O [1]) (fig. A.1), de donde, después de multiplicar por m, obtenemos:

$$E' = m \operatorname{ch} a' = E \operatorname{ch} b + p \cos \alpha \operatorname{sh} b.$$

Advirtamos que la magnitud $p \cos \alpha$ es la proyección en el sistema de referencia O del vector del impulso de la partícula A en la dirección *contraria* a la dirección del movimiento del sistema O' (ya que α es el ángulo entre los vectores $v_{A'|O}$ y $v_{O'|O}$; véase figs. A.1 y A.2). Con otras palabras, esta magnitud es igual a la coordenada p_1 del vector $\boldsymbol{p}$ en el sistema de coordenadas rectangular Op_1p_2, ligado con el sistema de referencia O, en el cual el eje Op_1 está dirigido en contra del vector $v_{O'|O}$ (fig. A.2). Así pues,

$$E' = E \operatorname{ch} b + p_1 \operatorname{sh} b. \qquad (1)$$

---

[1]) Aquí tomamos el ángulo externo y no el interno del triángulo, para que más adelante en la fórmula (1) obtengamos el signo más y no el menos. Desde luego, esto es cuestión de gustos.

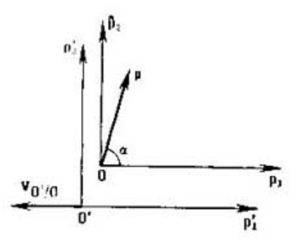


FIG. A.2

Para describir la transformación del vector del impulso, trazaremos en el sistema de referencia O' los ejes de coordenadas $O'p'_1$ y $O'p'_2$, paralelos a los ejes Op_1 y Op_2 respectivamente, o sea, el eje $O'p'_1$ está dirigido a lo largo del vector de velocidad $v_{O|O'}$, y $O'p'_2$ es perpendicular a este vector. Entonces, las coordenadas del vector $\boldsymbol{p}'$, en este sistema, son iguales a $p'_1 = p' \cos \alpha'$, $p'_2 = p' \operatorname{sen} \alpha'$, donde α' es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{p}'$ (o $v_{A|O'}$) y $v_{O|O'}$. Como este ángulo es igual al ángulo del vértice $\boldsymbol{O'}$ del triángulo $\boldsymbol{OO'A}$ en el espacio de velocidades, según el teorema de los cosenos para el lado $\boldsymbol{OA}$ de este triángulo obtenemos:

$$E = m \operatorname{ch} a = m \operatorname{ch} a' \operatorname{ch} b - m \operatorname{sh} a' \operatorname{sh} b \cos \alpha' =$$
$$= E' \operatorname{ch} b - p'_1 \operatorname{sh} b,$$

y de aquí $p'_1 \operatorname{sh} b = E' \operatorname{ch} b - E$.
Sustituimos en el segundo miembro la expresión (1) para E':

$$p'_1 \operatorname{sh} b = (E \operatorname{ch} b + p_1 \operatorname{sh} b) \operatorname{ch} b - E =$$
$$= E (\operatorname{ch}^2 b - 1) + p_1 \operatorname{ch} b \operatorname{sh} b =$$
$$= (E \operatorname{sh} b + p_1 \operatorname{ch} b) \operatorname{sh} b.$$

Por lo tanto, $p'_1 = E \operatorname{sh} b + p_1 \operatorname{ch} b$. (2)
Queda por hallar el nuevo valor de la componente del impulso, perpendicular a la dirección del movimiento relativo de los sistemas. Según el teorema $\mathcal{T}'$ de los senos

$$\operatorname{sh} a/\operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sh} a'/\operatorname{sen} \alpha,$$

de aquí

$$p'_2 = p' \operatorname{sen} \alpha' = m \operatorname{sh} a' \operatorname{sen} \alpha' =$$
$$= m \operatorname{sh} a \operatorname{sen} \alpha = p \operatorname{sen} \alpha = p_2. \qquad (3)$$

Juntemos las relaciones (1), (2), (3):

$$\begin{aligned} E' &= E \operatorname{ch} b + p_1 \operatorname{sh} b, \\ p_1' &= E \operatorname{sh} b + p_1 \operatorname{ch} b, \\ p_2' &= p_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Esta es la famosa *transformación de Lorentz* (para la energía y el impulso). En la siguiente sección la estudiaremos con más detalle, por ahora señalemos que la componente del impulso, perpendicular a la dirección del movimiento relativo de los sistemas, no varía con la transformación de Lorentz; la otra componente, «la longitudinal», se «revuelve», por así decirlo, con la energía. Por eso, es suficiente analizar la transformación, definida por las primeras dos líneas de (4):

$$\begin{aligned} E' &= E \operatorname{ch} b + p_1 \operatorname{sh} b, \\ p_1' &= E \operatorname{sh} b + p_1 \operatorname{ch} b \end{aligned} \tag{5}$$

En el plano (E, p_1).

GEOMETRÍA DE LA TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ. GIRO HIPERBÓLICO Y FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Para comprender mejor como está construida la transformación de Lorentz, la analizaremos junto con el giro común del plano. Deduciremos primero las fórmulas de transformación de las coordenadas de un punto al girar los ejes.

Supongamos que en el sistema de coordenadas rectangular Oxy el punto A tiene las coordenadas (x, y). Giremos los ejes de coordenadas alrededor del origen O en un ángulo β y hallemos las coordenadas del punto A en el nuevo sistema $Ox'y'$ (fig. A.3). La abscisa x' es igual a la proyección del vector $\overrightarrow{OA}$ sobre el eje Ox', o sea, al producto escalar de este vector por el vector unitario e_x' del eje Ox'. Es claro que las coordenadas del vector e_x' (en el sistema Oxy) son iguales $(\cos\beta; \operatorname{sen}\beta)$ por eso,

$$x' = \overrightarrow{OA} e_x' = x \cos\beta + y \operatorname{sen}\beta.$$

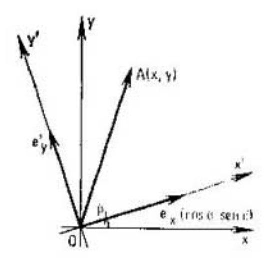


FIG. A.3

Análogamente (véase fig. A.3), las coordenadas e'_y son iguales $(-\text{sen}\ \beta;\ \cos\beta)$ e $y' = \overrightarrow{OA}e'_y = -x\ \text{sen}\ \beta + y\cos\beta$.
Así

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\beta + y\ \text{sen}\ \beta,\\ y' &= -x\ \text{sen}\ \beta + y\cos\beta. \end{aligned} \tag{6}$$

Como vemos, exteriormente las fórmulas del giro son muy parecidas a las fórmulas de la transformación de Lorentz, sólo que en unas entran las funciones trigonométricas y en otras las hiperbólicas. Pero tras el parecido externo se esconde un contenido geométrico más profundo. Para explicarlo veamos las fórmulas (5) y (6) desde otro punto de vista. Hasta ahora considerábamos que, digamos, en las fórmulas (6) $(x;\ y)$ y $(x';\ y')$ eran las coordenadas de un mismo punto, pero respecto de diferentes ejes; ahora consideraremos que tenemos un sistema de coordenadas y dos puntos, y analizaremos (6) como las fórmulas que describen la transformación del plano, en el que el punto $(x;\ y)$ se transforma en $(x';\ y')$. Entonces, la transformación determinada por estas fórmulas es el giro del plano $R^{-\beta}$ alrededor del origen de coordenadas en un ángulo $-\beta$. En efecto, es evidente que (véase fig. A.4) las coordenadas $(x';\ y')$ del punto $A' = R^{-\beta}(A)$ en el sistema Oxy coinciden con las coordenadas del punto A en el sistema $Ox'y'$, obtenido de Oxy mediante el giro de los ejes en un ángulo β, y se expresan por las fórmulas (6).

Pero ¿qué representan, desde este punto de vista, las transformaciones de Lorentz? Escribamos de nuevo las fórmulas (5), sustituyendo las notaciones de las coordenadas E y p_1 por unas más usuales x e y:

$$\begin{aligned} x' &= x\ \text{ch}\ b + y\ \text{sh}\ b,\\ y' &= x\ \text{sh}\ b + y\ \text{ch}\ b. \end{aligned} \tag{7}$$

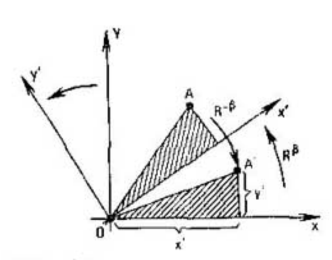


FIG. A.4

FIG. A.5

Hagamos la diferencia y la suma de estas ecuaciones considerando que ch $b = (e^b + e^{-b})/2$, sh $b = (e^b - e^{-b})/2$:

$$x' - y' = x\,(\text{ch } b - \text{sh } b) + y\,(\text{sh } b - \text{ch } b) =$$
$$= e^{-b}\,(x - y),$$
$$x' + y' = x\,(\text{ch } b + \text{sh } b) + y\,(\text{sh } b + \text{ch } b) =$$
$$= e^{b}\,(x + y).$$

De aquí se ve que es cómodo estudiar la transformación utilizando el sistema de coordenadas OXY, de cuyos ejes sirven las bisectrices de los ángulos coordenadas del sistema Oxy (fig. A.5), ya que según las fórmulas (6) (con $\beta = -45°$) el punto con coordenadas $(x;\ y)$, respecto de Oxy, tendrá, en el sistema OXY, las coordenadas

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x - y), \qquad Y = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x + y).$$

Por lo tanto, con nuestra transformación, el punto $A\ (X;\ Y)$ pasa al punto $A'\ (X';\ Y')$, donde

$$X' = e^{-b}X, \quad Y' = e^{b}Y.$$

Geométricamente estas igualdades significan que el plano se alarga por uno de los ejes OX y OY (cuando $b > 0$, por el eje OY) en e^b veces y en tantas veces se acorta por el otro eje. Aquí el producto de las coordenadas XY permanece constante $(X'Y' = e^{-b}Xe^{b}Y = XY)$, o sea, los puntos del plano es como si se desplazaran por las hipérbolas $XY =$ = const. Por eso, nuestra transformación se llama *giro hiperbólico*; lo denotaremos con L^b. Se dice que la magnitud

XY, o en las coordenadas originales $x^2 - y^2 = 2XY$, es un *invariante* del giro hiperbólico. En el caso de la transformación de Lorentz de la energía-impulso este invariante nos es bien conocido: $E^2 - p^2 = m^2$, o sea, el cuadrado de la masa en reposo de una partícula con energía E e impulso p, y la masa en reposo es igual en todos los sistemas de referencia. Un invariante análogo lo tiene el giro común del plano, esto es, el cuadrado de la distancia del punto al centro del giro; en coordenadas esto es $x^2 + y^2$ (si el centro del giro coincide con el origen de coordenadas). Podemos decir que en un giro común, los puntos del plano «resbalan» por la circunferencia $x^2 + y^2 = \text{const}$.

Existe también otro invariante del giro hiperbólico. Este se caracteriza por un par de vectores y es análogo al producto escalar de los vectores en la geometría común. Es fácil hallar su aspecto, si en la fórmula que expresa el producto escalar $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ de los vectores $\boldsymbol{a}_1$ $(x_1; y_1)$ y $\boldsymbol{a}_2$ $(x_2; y_2)$ a través del cuadrado de las longitudes de estos vectores y de su suma

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2|^2 - |\boldsymbol{a}_1|^2 - |\boldsymbol{a}_2|^2\right),$$

sustituimos en lugar de los cuadrados comunes de las longitudes los «hiperbólicos» (por ejemplo, en lugar de $|\boldsymbol{a}_1|^2 = x_1^2 + y_1^2$ tomamos $x_1^2 - y_1^2$, etc.). Como resultado de esta sustitución obtenemos la magnitud

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2 - (x_1^2 - y_1^2) - (x_2^2 - y_2^2)\right] = x_1x_2 - y_1y_2,$$

que no varía en los giros hiperbólicos, ya que las expresiones $(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2$, $x_1^2 - y_1^2$, $x_2^2 - y_2^2$ son invariantes. Esta magnitud es denominada *producto seudoescalar* de los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$. Explicaremos su sentido físico y geométrico.

Supongamos que A y B son dos partículas con masas m_A y m_B que tienen en el sistema de referencia O, las energías E_A y E_B y los impulsos p_A y p_B. Por sencillez analizaremos el caso unidimensional, o más exactamente, supongamos que en el sistema O las partículas A y B se mueven en una misma dirección (respecto al caso general véase el problema 4). Calculemos el producto seudoescalar de los vectores $(E_A; p_A)$ y $(E_B; p_B)$, considerando naturales las veloci-

dades $v_{A|O} = \text{th}\, a$ y $v_{B|O} = \text{th}\, b$:

$$E_A E_B - p_A p_B = m_A \text{ ch } a \cdot m_B \text{ ch } b -$$
$$- m_A \text{ sh } a \cdot m_B \text{ sh } b = m_A m_B \text{ ch } (a - b).$$

Pero $| a - b | = c$ es la distancia entre los puntos A y B en el espacio de velocidades (ya que estos puntos están en una recta junto con el punto O), por lo tanto,

$$E_A E_B - p_A p_B = m_A m_B \text{ ch } c,$$

donde $\text{th}\, c = v_{B|A}$. Una fórmula análoga es válida también en el caso general (no unidimensional), véase el problema 4. En su segundo miembro tenemos una expresión que no depende del sistema de referencia, así pues, hemos obtenido una confirmación más de que el primer miembro, o sea, el producto seudoescalar de los vectores $(E_A; p_A)$ y $(E_B; p_B)$, es un invariante.

¿Cómo obtener una fórmula parecida, a partir de razonamientos puramente geométricos? Recordemos que el paso del sistema de reposo de la partícula A al sistema de reposo de la partícula B corresponde a la transformación de Lorentz o al giro hiperbólico con parámetro $c = \| AB \|$. Tomemos ahora dos vectores arbitrarios $\boldsymbol{a}_1$ $(x_1; y_1)$ y $\boldsymbol{a}_2$ $(x_2; y_2)$. En el giro hiperbólico L^c el vector $\boldsymbol{a}_1$ se transforma en un cierto vector $\boldsymbol{a}_1'$ con coordenadas $(x_1'; y_1')$, que pueden ser calculadas usando la fórmula (7). Cuando el parámetro c varía de $-\infty$ a ∞, el punto $(x_1'; y_1')$ recorre la hipérbola (más exactamente, una de sus ramas), por eso, para un cierto c el vector $\boldsymbol{a}_1'$ será proporcional a $\boldsymbol{a}_2$: $\boldsymbol{a}_1' = k\boldsymbol{a}_2$, o sea, $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1') = k\,(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ (explíquese esto). Pero

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1') = x_1 (x_1 \text{ ch } c + y_1 \text{ sh } c) -$$
$$- y_1 (x_1 \text{ sh } c + y_1 \text{ ch } c) = (x_1^2 - y_1^2) \text{ ch } c,$$

y evidentemente, $k^2 = (x_1'^2 - y_1'^2)/(x_2^2 - y_2^2) = (x_1^2 - y_1^2)/(x_2^2 - y_2^2)$. Por lo tanto,

$$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \sqrt{x_1^2 - y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 - y_2^2} \text{ ch } c$$

(desde luego, con la condición $| x_1 | \geqslant | y_1 |$, $| x_2 | \geqslant | y_2 |$; en otros casos es necesario en algunas partes de esta fórmula cambiar los signos). Para nosotros ahora es importante que esta última fórmula es parecida a la definición del producto escalar habitual de los vectores:

$$\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 = | \boldsymbol{a}_1 | \cdot | \boldsymbol{a}_2 | \cos \gamma,$$

donde γ es el ángulo entre los vectores $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$. En particular, aquí vemos que el parámetro del giro hiperbólico es análogo al ángulo del giro común.

Veamos otra manifestación sorprendente de esta analogía.

El ángulo β de giro R^β cuando $0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ puede ser interpretado como el área doble del sector circular AOA', donde A es un punto arbitrario de la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, $A' = R^\beta(A)$ (fig. A.6). Es notable que una afirmación semejante es válida también para el giro hiperbólico L^b: su parámetro b (cuando $b \geqslant 0$) es igual al área doble del sector hiperbólico AOA', donde A es un punto arbitrario de la hipérbola «unitaria» $x^2 - y^2 = 1$ (ó $XY = 1/2$), $A' = L^b(A)$. Para la demostración señalemos que el área del sector AOA' es igual al área del trapecio curvilíneo $P'PAA'$, situado bajo el arco de la hipérbola AA' (fig. A.7), ya que cada una de estas figuras se obtiene del

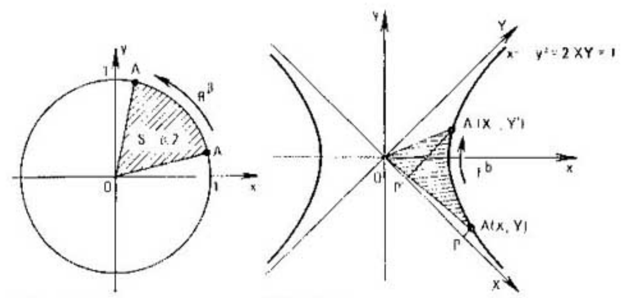


FIG. A.6 FIG. A.7

cuadrilátero curvilíneo $OPAA'$ mediante el corte de uno de los dos triángulos equivalentes OPA o $OP'A'$ ($S_{OPA} = XY/2 = X'Y'/2 = S_{OP'A'}$, donde $(X; Y)$ y $(X'; Y')$ son las coordenadas de los puntos A y A'). Hallamos el área del trapecio curvilíneo integrando la función $Y = 1/2X$, que determina nuestra hipérbola:

$$S_{P'PAA'} = \int_{X'}^{X} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln \frac{X}{X'} = \frac{1}{2} \ln e^b = \frac{b}{2}$$

(recordemos que $X' = e^{-b}X$). Así, $b = 2S_{AOA'}$. Del mismo modo se demuestra que cuando $b < 0$ el área del sector AOA' es igual a $-b/2$, pero el punto A se desplaza por la hipérbola hacia el otro lado. De aquí es fácil deducir la relación [1])

$$L^{b_1+b_2} = L^{b_1} \circ L^{b_2},$$

análoga a la regla de composición de los giros comunes:

$$R^{\beta_1+\beta_2} = R^{\beta_1} \circ R^{\beta_2}.$$

Y del mismo modo que para la regla de composición de los giros y de la escritura del giro en coordenadas (6), se deducen las fórmulas de adición para las funciones trigonométricas, de la regla de composición de los giros hiperbólicos y de su representación en coordenadas (7) se puede deducir la fórmula de adición para las funciones hiperbólicas (las escribimos al inicio del capítulo 5) [2]). Señalemos también que se puede dar una definición de las funciones hiperbólicas, que repite casi literalmente la definición de las funciones trigonométricas. En efecto, por definición, $\cos \beta$ y $\operatorname{sen} \beta$ son las coordenadas del punto en el que se transforma el punto A (1; 0) durante el giro R^β. Análogamente, ch b y sh b son las coordenadas (en el sistema Oxy) del punto en el que se transforma el punto A (1; 0) durante el giro hiperbólico L^b (esto se deduce directamente de la fórmula (7), en las que es necesario poner $x = 1$, $y = 0$; véase la fig. A.8).

Esperamos que hayamos podido esclarecer, por qué las funciones hiperbólicas tienen tanto en común con las trigonométricas y cuál es su relación con la hipérbola.

Nosotros incluso hemos tratado de hacer un poco más, o sea, de dar a conocer al lector otra, la tercera en nuestro libro, geometría no euclidiana, la llamada *geometría de Minkowski*. Podemos decir que ésta es la geometría en la que se transforma la euclidiana, si sustituimos el producto escalar en ella por uno seudoescalar. Con esta sustitución, muchos conceptos, teoremas y hasta sus demostraciones se conservan, pero adquieren otro sentido. Así, el giro común se transforma en uno hiperbólico, las funciones trigonométricas, en hiperbólicas, etc. El «campo de acción» de la geometría de Minkowski es la teoría de la relatividad

---

[1]) Véase también el problema 2 al final del Apéndice.

[2]) Véase también el problema 3 al final del Apéndice

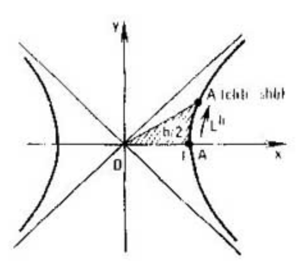


FIG. A.8

es el espacio de las «energías-impulsos», y también el espacio-tiempo real. Sobre esto hablaremos un poco en la siguiente sección.

ESPACIO-TIEMPO

En esta sección esclareceremos cómo se transforman las coordenadas de espacio-tiempo de un suceso, al pasar de un sistema inercial de referencia a otro. Para eso, veamos el siguiente experimento mental sencillo.

Un impulso de láser corto, que consta de N oscilaciones completas se observa en dos sistemas de referencia: el sistema de laboratorio O y el sistema móvil O', que se mueve con velocidad $v = \text{th}\, b$ respecto del sistema de laboratorio en la dirección negativa de su eje Ox. Consideraremos que en el momento del tiempo nulo en ambos sistemas sus orígenes de coordenadas coinciden y que el eje $O'x'$ del sistema móvil es paralelo a Ox. Finalmente supongamos que el impulso se propaga en la dirección positiva del eje Ox (en el sistema O), y por lo tanto, del eje $O'x'$ también (en el sistema O') y que la primera «joroba» de la onda en el momento nulo del tiempo pasa a través del origen de coordenadas (en ambos sistemas).

Observemos ahora la última «joroba» de la onda. Es claro, que para el observador del sistema de laboratorio en el momento t ésta tendrá la coordenada $x = ct - N\lambda$, donde λ es la longitud de onda, y c, desde luego, la velocidad de su propagación, o sea, la velocidad de la luz (fig. A.9). Así pues, el número total de oscilaciones

$$N = (ct - x)/\lambda.$$

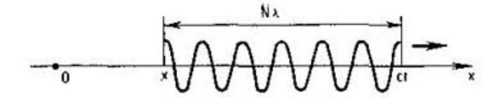


FIG. A.9

Señalemos, que en los capítulos anteriores analizábamos fundamentalmente la luz desde el punto de vista corpuscular, o sea, como un haz de fotones, de partículas con masa en reposo nula, que poseen una determinada energía e impulso. En este aspecto la luz se nos presenta en tales fenómenos como el fotoefecto o la dispersión de Compton. Ahora que nos interesa la propagación de la luz en el espacio y en el tiempo salen al primer plano sus características ondulatorias, o sea, la longitud de onda λ y la frecuencia $\nu = c/\lambda$. Como ya sabemos, la frecuencia de la luz está ligada con la energía de los fotones E por la fórmula de Planck $E = h\nu/c^2$. Al pasar a un nuevo sistema de referencia la energía (y el impulso) del fotón varían, y junto con ellos varían sus propiedades ondulatorias λ y ν. La ley de variación fue deducida en el capítulo 7 al estudiar el efecto Doppler (véase también el capítulo 8): si el sistema móvil se mueve respecto del sistema de laboratorio con velocidad $v = \text{th}\, b$ al mismo lado que el fotón, la energía del fotón, y por lo tanto, la frecuencia de la onda en el sistema móvil será e^b veces menor que en el de laboratorio:

$$E' = e^{-b}E, \quad \nu' = e^{-b}\nu;$$

si el movimiento ocurre en la dirección contraria (con la misma velocidad), entonces

$$E' = e^{b}E, \quad \nu' = e^{b}\nu.$$

Escribamos de nuevo la expresión para el número de oscilaciones en el impulso de láser a través de la frecuencia:

$$N = \frac{\nu}{c}(ct - x).$$

Es evidente, que este número será igual para ambos observadores, o sea,

$$N = \frac{\nu'}{c}(ct' - x'),$$

donde $v' = e^{b}v$ es la frecuencia de la onda en el sistema móvil (en el sistema O las direcciones del movimiento de la onda y del sistema O' son contrarias), y t' y x' son las coordenadas temporal y espacial de la última «joroba» de la onda en el sistema O'. Comparando las dos expresiones para N obtenemos que

$$ct' - x' = e^{-b} (ct - x).$$

Esta fórmula es válida para cualquier valor de t y de x tales que $x \leqslant ct$, ya que en la igualdad $x = ct - N\lambda$ la magnitud $N\lambda$ puede tomar cualquier valor no negativo.

Analizando un impulso de láser análogo que se propaga en la dirección negativa del eje Ox, obtenemos la igualdad

$$N = \frac{v}{c} (ct + x) = \frac{v'}{c} (ct' + x'),$$

donde $v' = e^{-b}v$ (ahora la dirección del movimiento del sistema O' y del impulso coinciden). Por lo tanto, (cuando $x \geqslant -ct$),

$$ct' + x' = e^{b} (ct + x).$$

Escribamos juntas las relaciones obtenidas:

$$ct' - x' = e^{-b} (ct - x),$$
$$ct' + x' = e^{b} (ct + x).$$

Identificamos en ellas las fórmulas del giro hiperbólico, las transformaciones de Lorentz, de la sección anterior (en coordenadas OXY, donde $X = ct - x$, $Y = ct + x$). Para pasar a las coordenadas (t, x) (que corresponden al sistema de coordenadas Oxy de la sección anterior), tomemos la semisuma y la semirresta de estas dos ecuaciones:

$$ct' = \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} ct + \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} x = ct \operatorname{ch} b + x \operatorname{sh} b,$$
$$x' = \frac{e^{b} - e^{-b}}{2} ct + \frac{e^{b} + e^{-b}}{2} x = ct \operatorname{sh} b + x \operatorname{ch} b.$$

Así, al pasar al nuevo sistema inercial de referencia las coordenadas temporal y espacial de cualquier suceso varían según la misma ley de transformación de Lorentz, como la energía y el impulso de una partícula (más exactamente, como la componente del vector del impulso paralela a la

velocidad relativa de los dos sistemas de referencia). Regresando al sistema de unidades en el que $c = 1$, que es usual casi en todas partes de nuestro libro, obtenemos la fórmula final [1]:

$$\begin{aligned} t' &= t \operatorname{ch} b + x \operatorname{sh} b, \\ x' &= t \operatorname{sh} b + x \operatorname{ch} b. \end{aligned} \tag{8}$$

(Señalemos que hemos analizado sólo una coordenada espacial del suceso; las otras coordenadas que corresponden a los ejes perpendiculares a Ox no variarán, igual que en el caso de la transformación de la energía-impulso.) Como sabemos la diferencia de los cuadrados de las coordenadas, $t^2 - x^2$, en la transformación de Lorentz no varía. Este invariante relativista se llama «intervalo».

Para concluir verifiquemos que las fórmulas obtenidas por nosotros de la transformación de las coordenadas espacio-tiempo, conducen a la ley de composición de velocidades ya conocida para el caso del movimiento unidimensional. Supongamos que u y u' son las velocidades de una cierta partícula en los sistemas de referencia de laboratorio y móvil. Entonces, por definición

$$u = \Delta x/\Delta t, \quad u' = \Delta x'/\Delta t'.$$

El incremento de la coordenada y del tiempo en los dos sistemas de referencia cumplen las mismas transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \Delta t \operatorname{ch} b + \Delta x \operatorname{sh} b, \\ \Delta x' &= \Delta t \operatorname{sh} b + \Delta x \operatorname{ch} b. \end{aligned}$$

Dividiendo ahora $\Delta x'$ entre $\Delta t'$ obtenemos la bien conocida fórmula:

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta t \operatorname{sh} b + \Delta x \operatorname{ch} b}{\Delta t \operatorname{ch} b + \Delta x \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sh} b + \frac{\Delta x}{\Delta t} \operatorname{ch} b}{\operatorname{ch} b + \frac{\Delta x}{\Delta t} \operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{th} b + \frac{\Delta x}{\Delta t}}{1 + \operatorname{th} b \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v + u}{1 + vu}.$$

[1] Hablando en rigor, hemos deducido las fórmulas (8) sólo para el caso $|x| \leqslant ct$, pero no es difícil demostrar que pueden ser extendidas a todos los valores de las coordenadas.

Esto confirma una vez más, que las coordenadas espaciales y temporales de cualquier suceso, en diferentes sistemas inerciales de referencia están ligadas unas con otras mediante la transformación de Lorentz. El tiempo y las coordenadas no existen por sí mismos, están unidos en un único (cuadridimensional) espacio-tiempo. Esto nos lleva a tales conclusiones como la reducción de las longitudes y la variación de la marcha de los relojes para los observadores, que se mueven con gran velocidad uno respecto del otro. A la descripción de éstos y otros fenómenos espacio-tiempo en la teoría de la relatividad están dedicados muchos libros de vulgarización excelentes, a los que recomendamos acudir al lector. Nosotros pondremos el punto final en aquella parte, desde la que por lo general es usual comenzar la exposición de la teoría de la relatividad de A. Einstein.

PROBLEMAS

1. Hallar las fórmulas de la transformación inversa de Lorentz, resolviendo la ecuación (7) respecto de x e y. Demuéstrese que la transformación, inversa a L^b, es L^{-b}.

2. Demuéstrese que $L^{b_1+b_2} = L^{b_1} \circ L^{b_2}$

a) mediante un cálculo directo;

b) basándose en el sentido físico del parámetro b de la transformación L^b ($\operatorname{th} b$ es la velocidad relativa).

c) utilizando la representación del giro hiperbólico como una composición de la extensión y compresión del plano en dos direcciones perpendiculares.

3) Supongamos que al girar R^{β_1} el punto A $(x; y)$ se transforma en A' $(x'; y')$, al girar R^{β_2} el punto A' pasa a A'' $(x''; y'')$. Escribir las coordenadas $(x'; y')$ y (x'', y''). Escribir las coordenadas de $(x''; y'')$ utilizando el hecho de que $A'' = R^{\beta_1+\beta_2}(A)$. Obtener de aquí la fórmula de adición de las funciones trigonométricas. Deducir de un modo semejante las fórmulas de adición para las funciones hiperbólicas.

4. Supongamos que A y B son dos partículas con masas m_A y m_B. Demostrar que la magnitud $E_A E_B - p_A p_B$ (el producto de las energías de las partículas menos el producto escalar de los vectores del impulso) es igual a $m_A m_B \operatorname{ch} c$, donde $\operatorname{th} c = v_{A|B}$, y no depende del sistema de referencia, o sea, es un invariante relativista.

5. Utilizando la transformación de Lorentz, demuéstrese que de la ley de la conservación del impulso total, en dos sistemas de referencia que se mueven uno respecto de otro, resulta también la ley de la conservación de la energía en estos sistemas.